

Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

Thilo Weser

Disbui. München

1988

**Das Aggregationsproblem
in der Konjunkturtheorie**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades Doctor oeconomiae publicae
(Dr. oec. publ.)
an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Thilo Weser

1988

Referent: Prof. Dr. Claude Hillinger

Korreferent: Prof. Dr. Edwin von Böventer

Promotionsabschlußberatung am 27. Juli 1988

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstr. 15, Tel. 288663

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie: Ist es möglich, das Auftreten makroökonomischer Zyklen und deren Eigenschaften aus Annahmen auf mikroökonomischer Ebene abzuleiten?

Bekannte Konjunkturmodelle sind auf aggregierter Ebene formuliert, und für das Aggregationsproblem ist in der ökonomischen Literatur keine befriedigende Lösung bekannt. Für die Klasse linearer Modelle sind vielmehr starke negative Aussagen gezeigt.

In der vorliegenden Arbeit hingegen wird eine positive Lösung des Aggregationsproblems vorgeschlagen, die auf den Konjunkturmodellen C. Hillingers für Lager- und Ausrüstungszyklus aufbaut. Diese Modelle basieren auf dem Akzelerator zweiter Ordnung, sind im Kern einsektoral und daher unmittelbar zu disaggregieren.

Im Hauptteil der Arbeit werden zunächst diese Modelle im Detail analysiert und hierbei für jeden Zyklus die Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Modellvariablen bestimmt. Ferner wird das ihnen zugrundeliegende Konzept des Akzelerators zweiter Ordnung aus mikroökonomischen Optimalitätsbedingungen (Minimierung von Kapitalfehlbestands- und Anpassungskosten, unvollkommene Voraussicht zukünftiger konjunktureller Schwankungen) hergeleitet; alternativ können auch positive Skalenerträge zu zyklischem Verhalten führen.

Die unmittelbare disaggregierte Reinterpretation dieser Konjunkturmodelle sagt zyklisches Verhalten auf Unternehmensebene voraus (In einer ersten diesbezüglichen Untersuchung wurden tatsächlich stark ausgeprägte, individuell verschiedene Zyklen nachgewiesen). Aufgrund der individuellen Verschiedenheit der Unternehmenszyklen

Zusammenfassung

können diese nicht auf einfache Weise zu einem makroökonomischen Zyklus aggregiert werden, denn ein solcher ist als Summe von Unternehmenszyklen nur darstellbar, falls gewisse Periodenlängen und Phasenlagen ausgezeichnet sind. Soll dieses nicht postuliert werden, so ist ein Auswahlmechanismus für Perioden und Phasen erforderlich, der auf restriktive Annahmen verzichtet.

Ein solcher Mechanismus wird in der Arbeit vorgeschlagen. Er beruht auf der Idee variierender Parameter und nimmt an, daß die Akzeleratorkoeffizienten der Einzelunternehmen im konjunkturellen Verlauf geringfügigen Schwankungen unterliegen. Solche Schwankungen können in verschiedener Weise modelliert werden:

Werden sie als exogen angenommen (verursacht etwa durch einen aggregierten Zyklus, welcher im Modell nicht erklärt wird), so werden die Zyklen einiger Unternehmen resonant angeregt, wobei gewisse Perioden und Phasenlagen ausgezeichnet sind. Der hieraus resultierende aggregierte Zyklus besitzt relativ zum anregenden Zyklus die doppelte Periode und eine bestimmte Phasenlage. Hieraus ergeben sich starke Modellvorhersagen über unterschiedliche koexistierende Zyklen, welche empirischen Beobachtungen entsprechen, die zwar bereits lange bekannt, aber bislang unerklärt geblieben sind.

Werden Schwankungen von Akzeleratorkoeffizienten hingegen endogen modelliert, so ist hierdurch eine geschlossene Lösung des Aggregationsproblems für einzelne Zyklen möglich. Als Modellgrundlage sind nur elementare Annahmen erforderlich: Das durch die Modelle mit konstanten Parametern vorhergesagte (individuell verschiedene) Investitions-/Produktionsverhalten der Einzelunternehmen wird unter dem Einfluß genereller optimistischer oder

Zusammenfassung

pessimistischer Erwartungen geringfügig modifiziert; als Modellbeschreibung solcher Erwartungen dienen hierbei die aggregierten Investitionen/Produktion.

Alle Erklärungskomponenten können in einem integrierten Modell zusammengefaßt werden, welches Hillingers aggregiert formuliertem Gesamtmodell von Lager- und Ausrüstungszyklus entspricht. Anhand von Simulationsrechnungen an Beispielsystemen 60.Ordnung (30 Akzeleratorgleichungen zweiter Ordnung auf Unternehmensebene, je zur Hälfte für Ausrüstungsinvestitionen und Produktion) werden die Vorhersagen des Konzepts variierender Parameter bestätigt.

*"Hypothesen sind Netze,
nur der wird fangen,
der auswirft ..."*

(Novalis)

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	I
<u>1. Abschnitt: Einleitung und Problemstellung</u>	1
1.1 Konjunkturbegriff	2
1.2 Stilisierte Fakten	3
1.3 Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie	13
<u>2. Abschnitt: Konstante Parameter</u>	18
2.1 Konjunkturmodelle von Hillinger	18
2.1.1 Ausrüstungszyklus	18
2.1.2 Lagerzyklus	28
2.1.3 Gesamtmodell	33
2.2 Mikroökonomische Grundlagen zyklischen Ver- haltens und des Akzelerators 2. Ordnung	42
2.2.1 Minimierung von Anpassungskosten	43
2.2.2 Grenzfälle starker und schwacher Diskontierung	47
2.2.3 Gewinnmaximierung	54
2.3 Disaggregierte Reinterpretation	61
<u>3. Abschnitt: Variierende Parameter</u>	72
3.1 Mathematische Grundlagen	74
3.1.1 Parametrische Resonanz	74
3.1.2 Mathieu-Gleichung	77
3.1.3 Numerische Integration der Differential- gleichungen des Modells	81
3.2 Exogene Parametervariation	86

3.3	Endogene Parametervariation	102
3.3.1	Ausrüstungszyklus	102
3.3.2	Lagerzyklus	130
3.3.3	Gesamtmodell von Lager- und Ausrüstungszyklus	141
	Literaturverzeichnis	174

1 Einführung und Problemstellung

Makroökonomische Theorie formuliert Gesetzmäßigkeiten auf gesamtwirtschaftlicher Ebene, wobei ökonomische Quantitäten und ökonomische Handlungsträger zu aggregierten Einheiten zusammengefaßt sind. Das Aggregationsproblem besteht in der Aufgabe, solche Gesetzmäßigkeiten aus Annahmen auf disaggregierter Ebene abzuleiten.

Im Bereich der Konjunkturtheorie hat das Aggregationsproblem eine erstaunlich geringe Beachtung gefunden. Nahezu alle diesbezüglichen Beiträge lassen die entmutigende Wahl zwischen der Notwendigkeit implausibel restriktiver Annahmen, starken Unmöglichkeitstheoremen und mathematischer Undurchsichtigkeit. Durch derartige Befunde wird die Bedeutung der bekannten aggregiert formulierten Konjunkturmodelle relativiert.

Daher besteht Bedarf an einer positiven Lösung des Aggregationsproblems. Ausgehend von den Konjunkturmodellen Hillingers wird eine solche im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagen. Der Lösungsvorschlag betrifft nicht allein das Aggregationsproblem, sondern erklärt überdies einige weitere bereits seit langem bekannte, jedoch bislang unverstandene Konjunkturphänomene.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

1. Abschnitt: Einführung und Problemstellung

In Kapitel 1.1 werden die im Rahmen der vorliegenden Arbeit relevanten Begriffe "Konjunktur" und "Zyklus" präzisiert. Anschließend wird in Kapitel 1.2 ein Überblick über empirische Befunde gegeben, welche im Zusammenhang mit dem in der Arbeit vorgeschlagenen



Konjunkturbegriff

theoretischen Konzept erklärt werden können. In Kapitel 1.3 wird das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie formuliert und ein elementares (negatives) Theorem angeführt.

2. Abschnitt: Konstante Parameter

Im zweiten Abschnitt der Arbeit werden grundlegende Zusammenhänge an Modellen mit konstanten Parametern gezeigt. Kapitel 2.1 enthält eine detaillierte Analyse der Konjunkturmodelle von Hillinger in aggregierter Formulierung. Der ihnen zugrundeliegende Ansatz des Akzelerators zweiter Ordnung wird in Kapitel 2.2 aus mikroökonomischen Grundlagen hergeleitet. In Kapitel 2.3 werden diese Konjunkturmodelle disaggregiert reinterpretiert und die Aggregationsproblematik am konkreten Beispiel dargestellt.

3. Abschnitt: Variierende Parameter

In diesem Abschnitt wird eine positive Lösung des Aggregationsproblems auf der Basis des Konzepts variierender Parameter vorgeschlagen. In Kapitel 3.1 werden die hierfür relevanten mathematischen Grundlagen dargestellt; in den Kapiteln 3.2 und 3.3 wird das vorgeschlagene Konzept in exogener und endogener Ausarbeitung präsentiert und im Zusammenhang mit den Modellansätzen des zweiten Abschnitts untersucht.

1.1 Konjunkturbegriff

Unter "Konjunktur" wird das mittelfristige Abweichen makroökonomischer Größen von ihren gleichgewichtigen Trends verstanden; saisonale Schwankungen bleiben hierbei

Konjunkturbegriff

außer Betracht. Dieser Konjunkturbegriff impliziert die Wohldefiniertheit von Trends und erfordert zeithomogene Untersuchungsintervalle einer gewisser Mindestlänge.

Mit "Zyklus" wird entsprechend der traditionellen Auffassung ein sich periodisch wiederholender Vorgang sowie dessen Periode bezeichnet. Im engeren Sinne werden Zyklen als annähernd harmonisch oszillierende Abweichungen vom Trend verstanden (*additive Überlagerung von Zyklus und Trend*), wobei zeitlich veränderliche Amplituden zulässig sind.

Ein Zyklus kann - eventuell phasenverschoben - zugleich in mehreren ökonomischen Reihen auftreten; ebenso können sich mehrere Zyklen zugleich in einer ökonomischen Reihe überlagern (*additive Überlagerung mehrerer Zyklen*). Zyklen, die in mehreren ökonomischen Reihen auftreten, werden nach jeweils denjenigen benannt, in welchen sie besonders deutlich hervortreten.

Im Kontext der betrachteten theoretischen Konjunkturmodelle ist das Auftreten und die Stärke von Zyklen in den Lösungen von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängig. Daher gelte folgende Sprachregelung: In linearen Modellen bezeichnen Zyklen oszillierende Eigenlösungen; ihre Benennung entspricht den jeweiligen Entstehungsmechanismen. In disaggregierten, ev. schwach nichtlinearen Modellen wird der Zyklenbegriff allgemein für annähernd harmonisch oszillierendes Verhalten auf disaggregierter und aggregierter Ebene verwendet.

1.2 Stilisierte Fakten

Die vorliegende Arbeit ist theoretischer Natur, jedoch um engen Bezug zu empirischer Evidenz bemüht. In diesem

Stilisierte Fakten

Kapitel wird ein kurzer Überblick über konjunkturrelevante Beobachtungen gegeben, welche im Sinne einer abstrakten Darstellung zu stilisierten Fakten verkürzt werden.

Die nachfolgende Darstellung basiert weitgehend auf den Resultaten Professor Hillingers, der sich als Vorstand des Seminars für mathematische Wirtschaftstheorie der Universität München seit vielen Jahren empirisch und theoretisch mit Fragen der Konjunktur befaßt.¹ Die Systematik seiner Untersuchungen erlaubt die Formulierung folgender Kernaussagen:

- (1) Makroökonomische Reihen vieler Länder zeigen konjunkturelle Zyklen.

Angeichts der hier gewählten engen Definition von Konjunkturzyklen ist die Frage nach ihrer empirischen Evidenz berechtigt. In der älteren ökonomischen Literatur wird sie in breiter Übereinstimmung bejaht.² Beginnend in den fünfziger Jahren änderte sich die mehrheitliche Meinung der Ökonomen und wandte sich der Auffassung zu, konjunkturelle Bewegungen seien mehr oder weniger irregulär, jede Änderung sei durch spezifische exogene

1 Wichtige Resultate und Methoden sind beispielsweise in Hillinger: Inventory and Equipment Cycle Interaction (1986a) und Hillinger: Theorie und Empirie der Konjunkturzyklen (1986b) zusammengefaßt.

2 Die Entwicklung des ökonomischen Denkens über Konjunkturzyklen von Juglar (1862) über Schumpeter (1939), Samuelson (1939), Metzler (1947) und Hicks (1950) wurde von Matthews (1959) zusammengefaßt.

Stilisierte Fakten

Einflüsse verursacht.¹ Entsprechende empirische Einwände gegen die Existenz von Zyklen² sind nach Hillinger³ und Wehner⁴ jedoch durch methodologische Schwächen erklärbar. Neuerliche Evidenz für die Existenz von Konjunkturzyklen berichtet beispielsweise auch Britton.⁵

- (2) Konjunkturelle Schwankungen treten besonders ausgeprägt in Investitionsreihen (Lager, Ausrüstungen, Bauten) auf, während die Nachfrage eher trendbestimmt und stabil ist.

Diese Aussage ist - ungeachtet der Frage nach Periodizität - weithin anerkannt.⁶

- (3) Im allgemeinen treten unterschiedliche Zyklen zusammen auf (Lagerzyklus, Ausrüstungszyklus, Bauzyklus).

Die Periode von Lagerzyklen beträgt typischerweise 3-5 Jahre, diejenige von Ausrüstungszyklen 7-10 Jahre und

1 Hillinger (1986b) benennt vielfältige Ursachen dieses Meinungsumschwungs. In der Wachstumseuphorie der sechziger Jahre trat das allgemeine Interesse an Konjunktur in den Hintergrund; von einigen Ökonomen wurden traditionelle Konjunkturzyklen totgesagt (vgl. Bronfenbrenner, 1969). Aus gegebenem Anlaß der Krisen der siebziger und achtziger Jahre ist das Interesse an Konjunkturschwankungen wieder im Anwachsen begriffen.

2 z.B. Granger: The Typical Spectral Shape of an Economic Variable (1966)

3 Hillinger (1986b)

4 Wehner G.: Der Konjunkturverlauf in der Bundesrepublik Deutschland und in den Vereinigten Staaten (1985)

5 A. Britton: The Trade Cycle in Britain 1958-1982 (1986)

6 z.B. Tichy: Konjunkturschwankungen (1976), S.84f

Stilisierte Fakten

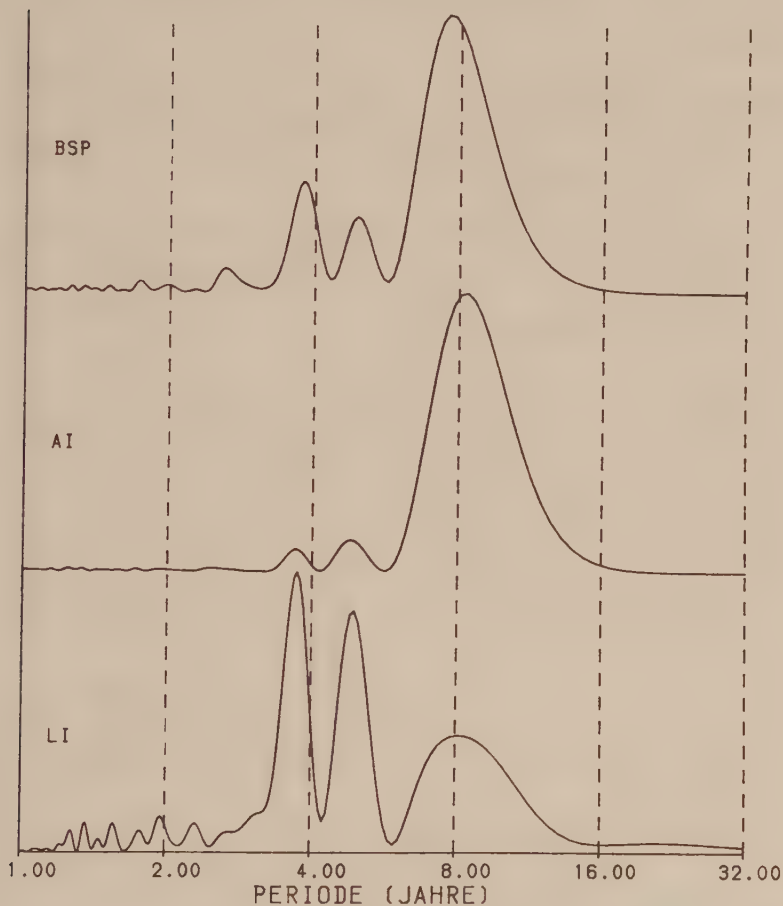
diejenige von Bauzyklen etwa 15-20 Jahre.¹

Beispielhaft für die bisher genannten Fakten werden in Abbildung 1.2.1 Spektren für die Bundesrepublik Deutschland angeführt. Gezeigt sind die Rohspektren (ungeglättet) von Bruttosozialprodukt sowie von Ausrüstungs- und Lagerinvestitionen.² Die Spektren sind aus saisonbereinigten Quartalsdaten von 160-1984 in konstanten Preisen berechnet; zur Trendbereinigung wurden Polynome dritter Ordnung abgezogen. Auf der Abszisse sind Periodenlängen in Jahren, auf der Ordinate auf Maximum normierte R^2 -Kurven ^{eingetragen} von Sinus/Kosinusfunktionen entsprechender Perioden. Alle drei Spektren weisen klare Maxima (Zyklen) bei etwa vier, fünf und acht Jahren auf. Das Spektrum der Ausrüstungsinvestitionen ist von Beiträgen längerer Perioden, das der Lagerinvestitionen von Beiträgen kürzerer Perioden dominiert. Auffällig ist, daß das Spektrum der Ausrüstungsinvestitionen nahezu frei von Beiträgen kürzerer Periode ist, während in den Spektren von Bruttosozialprodukt und Lagerinvestitionen jeweils langperiodige und kurzperiodige Beiträge auftreten; auch diese Beobachtung kann als stilisiertes Faktum gelten.

1 Die Verschiedenheit der Perioden wird häufig mit der unterschiedlichen typischen Lebensdauer der jeweiligen Güter oder der unterschiedlichen Trägheit der Anpassungen der jeweils relevanten Kapitalbestände an ihre gewünschten Niveaus erklärt (z.B. Matthews (1959), S. 101f).

2 Der empirische Nachweis 15-20-jähriger Zyklen (etwa als Bauzyklen) erfordert längere Untersuchungsintervalle, als in der Nachkriegszeit zur Verfügung stehen; entsprechende Aussagen basieren auf älteren Untersuchungen (vgl. Matthews (1959), S.98f). Weiter unten wird ein Beispiel gegeben (Abbildung 1.2.3).

BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (1960-1984):
 UNGEGLAETTETE SPEKTREN VON BRUTTOSOZIALPRODUKT,
 AUSRÜSTUNGS- UND LAGERINVESTITIONEN
 ZU KONSTANTEN PREISEN
 (SAISON- UND TRENDBEREINIGTE QUARTALS DATEN)



	MAXIMA BEI		
BSP	3.79	4.90	7.58
AI	3.68	4.81	8.33
LI	3.73	4.90	8.07

Abbildung 1.2.1

Stilisierte Fakten

Die bisher genannten Fakten stehen in guter Übereinstimmung mit den Konjunkturmodellen Hillingers (Kapitel 2.1) und können von diesen erklärt werden.¹ Ferner können folgende stilisierten Fakten konstatiert werden:

- (4) Treten gleichzeitig unterschiedlich lange Zyklen auf, so besitzt der längere Zyklus häufig die doppelte Periode des kürzeren Zyklus (2:1-Relation).

Das Phänomen harmonischer Relationen zwischen Perioden verschiedener koexistierender Zyklen wird häufig in der älteren Literatur berichtet² und hat Eingang in Standardlehrbücher gefunden³.

Hillinger (1986a) gibt für mehrere OECD-Länder die Perioden des Ausrüstungs- und des Lagerzyklus an. In Abbildung 1.2.2 werden diese Befunde ausgewertet: Die Perioden der beiden Zyklen der einzelnen Länder dienen als Koordinaten einer graphischen Darstellung. Die Linie durch den Ursprung kennzeichnet perfekte 2:1-Relationen zwischen den beiden Zyklen. Mit den Ausnahmen der USA und Österreichs liegen die Punkte aller betrachteten Länder in bemerkenswerter Nähe der 2:1-Linie.

Ein weiteres deutliches Beispiel enthält Abbildung 1.2.3.

4 Für das Vereinigte Königreich von 1870-1913 sind folgende Datenreihen gezeigt: (1) Nettogesamteinkommen zu Faktorkosten (links unten), (2) Inlandsanlageinvestitionen (rechts oben), (3)

1 Hillinger: Business Cycle Stylized Facts and Explanatory Models (1987a)

2 z.B. Hansen (1941) S. 19f, Matthews (1959), S. 215f

3 z.B. Samuelson: Volkswirtschaftslehre I (6. Auflage, 1975)

4 Entnommen aus Matthews (1959).

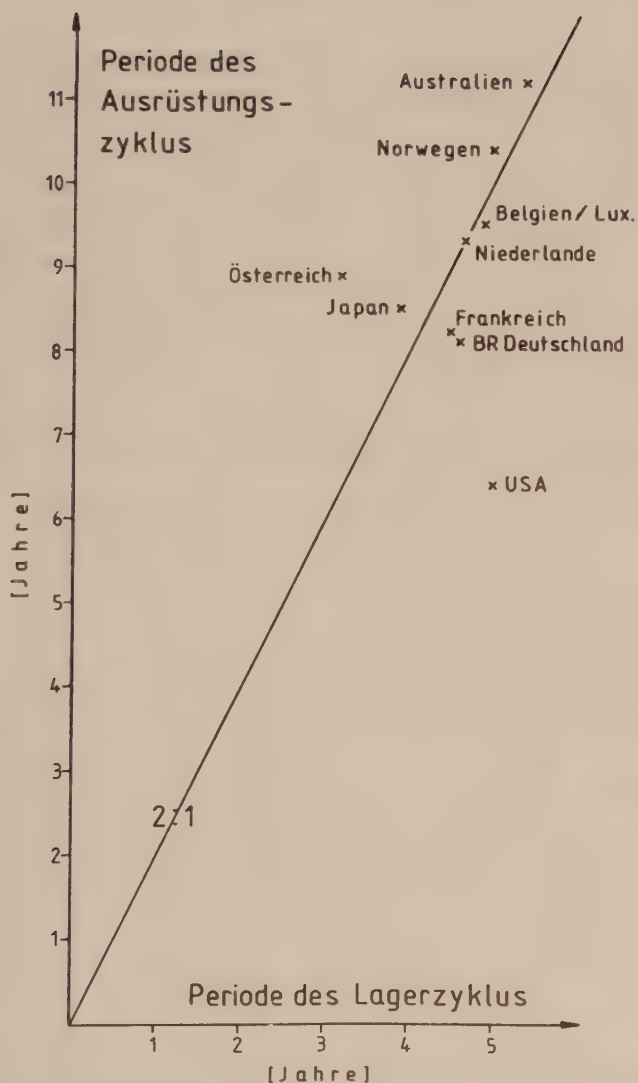


Abbildung 1.2.2:

Zusammenhang zwischen den Perioden von Ausrüstungszyklus und Lagerzyklus für verschiedene OECD-Länder (Daten aus Hillinger (1986a))

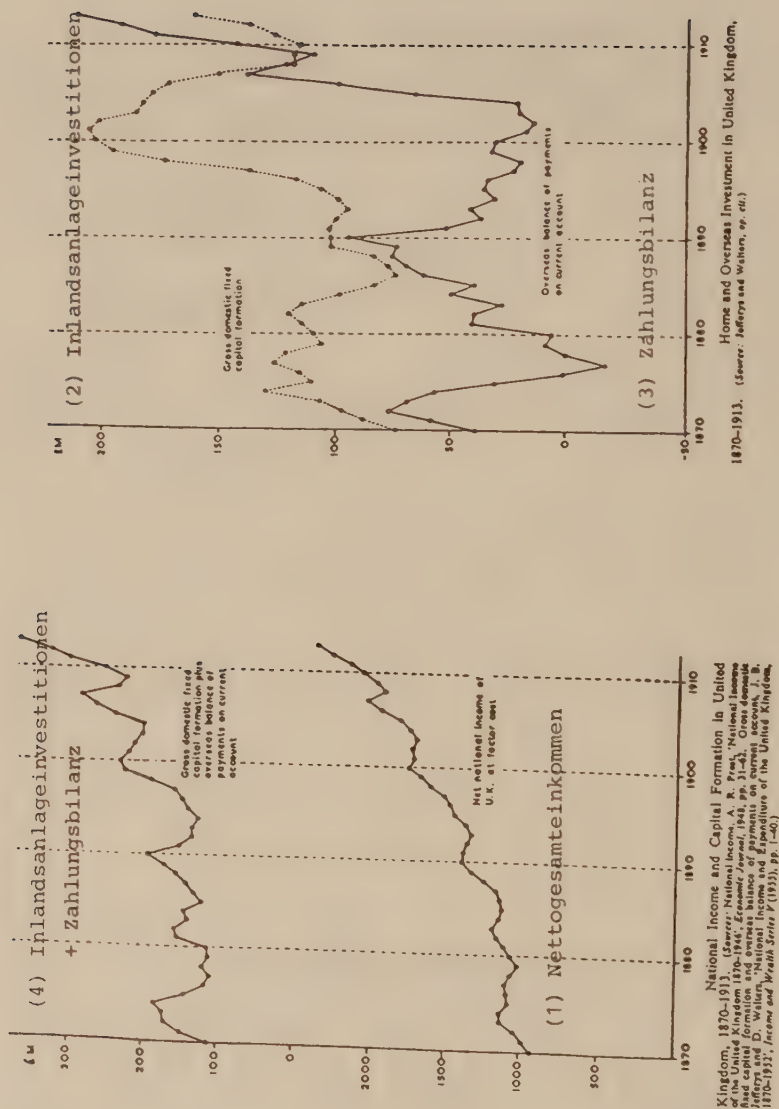


Abbildung 1.2.3:

Vereinigtes Königreich (1870-1913),
aus Matthews (1959)

Stilisierte Fakten

Zahlungsbilanz (rechts unten), sie kann in diesen Jahren als gute Beschreibung der Auslandsanlageinvestitionen angesehen werden¹, und (4) die Summe der letzten beiden Reihen (links oben). Wie aus dem linken Teilbild zu ersehen ist, schwanken das Gesamteinkommen (1) und die Gesamtanlageinvestitionen (4) zueinander parallel um ihre Trends mit Periodenlängen von etwa 8-10 Jahren. Wie das rechte Teilbild jedoch zeigt, legt die Aufspaltung der Anlageinvestitionen in Inlands- und Auslandskomponente sehr starke Fluktuationen mit Perioden von etwa 18-20 Jahren offen. Diese weisen diegleichen Perioden und Amplituden, jedoch genau entgegengesetzte Phasen auf und verschwinden daher in der Summe der beiden Reihen.

Im Zusammenhang mit 2:1-Relationen steht ein weiteres stilisiertes Faktum:

- (5) Schwankungen in ökonomischen Reihen zeigen häufig Maxima etwa einheitlicher Stärke, jedoch eine alternierende Abfolge tiefer und weniger tiefer Minima ("M"-Form). Auch die Umkehrung (etwa gleichstarke Minima, alternierende Maxima) wird berichtet ("W"-Form).

In Bezug auf die Relation zwischen Lager- und Ausrüstungszyklus tritt bevorzugt die M-Form auf.² Ein aktuelles Beispiel hierfür bietet das Bruttosozialprodukt der Bundesrepublik Deutschland.³ In Abbildung 1.2.3 hingegen ist die W-Form realisiert (besonders deutlich erkennbar am Maximum des Jahres 1890).

1 Die Reihe findet eine auffällige Entsprechung im nordamerikanischen Bauzyklus dieser Zeit (Vgl. Abramovitz (1964)).

2 Hansen: Fiscal Policy and Business Cycles (1941), S.16-17

3 z.B. G. Wehner (1985), Abb. 8.1.2.7.a

Stilisierte Fakten

Ein M-förmiger/W-förmiger Verlauf kann durch die Überlagerung zweier Zyklen einfacher und doppelter Periode (2:1-Relation) erklärt werden, wobei die Minima/Maxima des kürzeren Zyklus abwechselnd mit den Minima und Maxima des längeren Zyklus zusammenfallen. Beobachtung (5) kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

- (5') Bei 2:1-Relationen fallen Extrema des kürzeren Zyklus häufig mit Extrema des längeren Zyklus zusammen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden im Zusammenhang mit der disaggregierten Reinterpretation makroökonomischer Modelle Zyklen auf Unternehmensebene vorhergesagt. Ein entsprechendes stilisiertes Faktum "*Es existieren Zyklen auf Unternehmensebene*" ist in der ökonomischen Literatur jedoch nicht etabliert.¹ In einer ersten Untersuchung wurde diese Frage im Rahmen einer Seminararbeit am Beispiel dreier bundesdeutscher Automobilhersteller betrachtet. Die Befunde werden im relevanten Kontext (Kapitel 2.3) berichtet; an dieser Stelle wird nur das resultierende stilisierte Faktum mitgeteilt:

- (6) Auf Unternehmensebene existieren individuell verschiedene deutlich ausgeprägte Zyklen.

Die angeführten stilisierten Fakten werden dem theoretischen Charakter dieser Arbeit zufolge im Rahmen der nachfolgenden Diskussion als gegeben angenommen. Für die Fakten (4) und (5), insbesondere die 2:1-Relation, besteht ein beträchtliches Erklärungsdefizit: Obwohl

¹ L. Wilson: Catalogue of Cycles (1964) enthält allerdings eine beachtliche Anzahl disaggregierter Zyklen verschiedener Art.

Stilisierte Fakten

deren Evidenz schon in der älteren Literatur betont wird, steht bislang kein diesbezüglich erklärendes Konjunkturmodell zur Verfügung. Demgegenüber dient das in dieser Arbeit vorgeschlagene Modellkonzept variierender Parameter nicht nur der Behandlung des Aggregationsproblems, sondern besitzt zugleich alle angeführten stilisierten Fakten als unmittelbare Implikationen.

Auch hinsichtlich des Aggregationsproblems bestehen ernste Erklärungsdefizite, welche gegen die Mehrzahl aggregiert formulierter Konjunkturmodelle eingewendet werden können. Dieses wird im nächsten Kapitel ausgeführt.

1.3 Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

Makroökonomische Modelle sind stets mit einem Aggregationsproblem verbunden: Sind die Aussagen über Aggregate aus Annahmen über deren Konstituenten abzuleiten? Falls ja,¹ unter welchen Restriktionen?

Allen bekannten in der ökonomischen Literatur vorgeschlagenen Konjunkturmodellen gemeinsam ist ihre Formulierung in hochaggregierter Form. In der Argumentation wird jeder Sektor durch einen Handlungsträger repräsentiert, von dem angenommen wird, er verhalte sich wie die Mehrzahl oder der Durchschnitt aller Individuen des von ihm vertretenen Sektors. Ebenso wird mit Gütern verfahren, denen "typische" Eigenschaften

¹ Bekannte positive Lösungen des Aggregationsproblems bestehen überwiegend im Rahmen statischer Modelle, insbesondere für die Bereiche Produktion und Konsum (Einen Überblick geben z.B. Green (1964), van Daal/Merkies(1984)).

Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

(z.B. Lebensdauern) zugeschrieben werden.¹ Das weitere Vorgehen besteht darin, einen Satz dynamischer Gleichungen aufzustellen, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Modellparameter das System zyklische Lösungen hervorbringt, und die Eigenschaften dieser Lösungen zu charakterisieren.

Das Aggregationsproblem bleibt hierbei unberücksichtigt. Diese Vorgehensweise wird von Goodwin² wie folgt bewertet:

"Aggregative models, including my own, are less than totally satisfactory; they are useful in helping to conceptualize and as preliminary skirmishes prior to elaboration in disaggregative form."

Dessenungeachtet steht für praktisch kein bekanntes makroökonomisches dynamisches Konjunkturmodell eine disaggregierte Ausarbeitung zur Verfügung. Unter den wenigen formalen disaggregierten Betrachtungen über Konjunktur befinden sich die Arbeiten von Goodwin (1983a)³, Goodwin (1983b) und Kraft/Weise⁴. Die erstgenannten Beiträge Goodwins jedoch fallen unter die nachfolgend ausgeführte sowie die in Kapitel 2.3 von ihm selbst formulierte Kritik an linearen Systemen, wohingegen bei den letzten beiden Beiträgen die dynamischen Aspekte

1 z.B. J. Tinbergen: Statistical Testing of Business Cycle Theories (1939)

2 R.M. Goodwin: Disaggregating Models of Fluctuating Growth (1983b)

3 R.M. Goodwin: Essays in Linear Economic Structures (1983a)

4 M. Kraft, P. Weise: Eine Formalisierung von Spiethoffs Theorie der wirtschaftlichen Wechsellagen (1987)

Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

hinter den üblichen aggregierten Konjunkturmodellen zurückbleiben und insbesondere Periodizität und Dauer von Konjunkturzyklen nicht erklärt werden.

Allgemein wurde das Aggregationsproblem für dynamische Modelle u.a. von Theil¹ und Schlicht² untersucht. Für lineare Systeme ergeben sich starke negative Aussagen:

Gegeben sei ein System, welches auf mikroökonomischer Ebene durch den (reellen) m-zeiligen Vektor y und das Bewegungsgesetz

$$Dy = f(y) \quad (1.3.1)$$

beschrieben ist, worin D den Zeitableitungsoperator und $f(\cdot)$ eine reelle vektorwertige Funktion der Dimension m bezeichnen. Betrachtet wird eine Aggregationsregel, welche jedem m-zeiligen Vektor y ("Mikrozustand") einen n-zeiligen Vektor Y ("Makrozustand") mit $n < m$ zuordnet:

$$Y = \text{agg}(y) \quad (1.3.2)$$

Die Bewegungsgleichung auf makroökonomischer Ebene wird in der Form

$$DY = F(Y) \quad (1.3.3)$$

angesetzt, worin $F(\cdot)$ eine vektorwertige Funktion der Dimension n bezeichnet. Das Aggregationsproblem besteht in der Frage, inwieweit (1.3.3) eine korrekte Beschreibung des Systems darstellt. Einsetzen von (1.3.1) und (1.3.2) in (1.3.3) ergibt:

$$\text{agg}_y(y) \cdot f(y) = F(\text{agg}(y)) \quad (1.3.4)$$

1 H. Theil: Linear Aggregation of Economic Relations (1965)

2 E. Schlicht: Isolation and Aggregation in Economics (1985)

Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

Hierbei bezeichnet $\text{agg}_y(\cdot)$ den (komponentenweise) gebildeten Gradienten von $\text{agg}(\cdot)$.

Bei linearen Systemen ist Gleichung (1.3.4) i.a. nicht für alle Vektoren y erfüllbar, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f(y) := P \cdot y \quad , \quad \text{agg}(y) := Q \cdot y \quad , \quad F(Y) := R \cdot Y \quad (1.3.5)$$

seien lineare Funktionen mit Matrizen P , Q und R geeigneter Dimensionen. Gleichung (1.3.4) lautet in diesem Fall

$$Q \cdot P \cdot y = R \cdot Q \cdot y \quad (1.3.6)$$

und ist genau dann für alle y erfüllbar, falls gilt:

$$Q \cdot P = R \cdot Q \quad (1.3.7)$$

Das Aggregationsproblem besteht darin, bei gegebenen Matrizen P und Q eine Lösung R von (1.3.7) zu finden. Da R jedoch von geringerer Dimension ist als die übrigen Matrizen, ist das System überbestimmt und im allgemeinen unlösbar.

Als wesentliche Folgerung aus dieser Betrachtung ergibt sich die bedeutsame Aussage, daß lineare dynamische Systeme i.a. keine strenge Lösung des Aggregationsproblems bieten. Vielmehr sind hierzu restriktive Bedingungen - etwa der allgemeinen Art: "Alle Mikroindividuen eines Aggregats sind identisch und können durch einen Repräsentanten beschrieben werden" - erforderlich. Im Umkehrschluß kann aus der Erfordernis derartiger Restriktionen für die Gültigkeit solcher Modelle ersehen werden, daß diese als Erklärungsgrundlage realen Geschehens *cum grano salis* zu verstehen sind.

Das Aggregationsproblem in der Konjunkturtheorie

Auch die den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildenden Konjunkturmodelle von Hillinger sind linear und von diesen Überlegungen betroffen. Die Diskussion der Aggregationsproblematik wird an späterer Stelle (Kapitel 2.3) fortgesetzt; insbesondere wird die obige allgemeine negative Aussage über die Lösbarkeit des Aggregationsproblems bei linearen Systemen für diese Modelle weiter ausgeführt.¹ Zuvor sind jedoch vorbereitende Betrachtungen notwendig.

Im nun folgenden zweiten Abschnitt der Arbeit werden zunächst die Modelle von Hillinger im Detail untersucht (Kapitel 2.1) und anschließend (Kapitel 2.2) das ihnen zugrundeliegende Prinzip des Akzelerators zweiter Ordnung im Kontext eines mikroökonomischen Optimierungskalküls betrachtet. Hierauf (Kapitel 2.3) werden die Modelle disaggregiert reformuliert und am konkreten Beispiel die durch das Aggregationsproblem hervorgerufenen Schwierigkeiten gezeigt. Im dritten Abschnitt der Arbeit erfolgt die Entwicklung einer positiven Lösung des Aggregationsproblems auf der Basis des Konzepts variierender Parameter.

¹ Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Konzept zur endogenen Lösung des Aggregationsproblems ist nichtlinear.

2 Konstante Parameter

2.1 Konjunkturmodelle von Hillinger

Die von Professor Hillinger entwickelte Konjunkturtheorie reicht in ihren Ansätzen bis in die sechziger Jahre zurück¹. Seine Konjunkturmodelle basieren auf einem Akzelerator zweiter Ordnung und sind im Gegensatz zu den bekannten Akzelerator-Multiplikator-Modellen² im Kern einsektoral. Diese Eigenschaft erweist sich bei der Betrachtung des Aggregationsproblems als äußerst vorteilhaft.

Die Konjunkturmodelle von Hillinger bilden den Ausgangspunkt der Überlegungen dieser Arbeit. Nachfolgend werden das Modell des Ausrüstungszyklus, das Modell des Lagerzyklus sowie das Gesamtmodell beider Zyklen kurz referiert und hierbei die Phasenbeziehungen zwischen den Bewegungen der einzelnen Modellgrößen berechnet. Im nachfolgenden Kapitel 2.2 wird das Konzept des Akzelerators zweiter Ordnung mikroökonomisch begründet; hierauf werden in Kapitel 2.3 die Modelle disaggregiert reformuliert.

2.1.1 Ausrüstungszyklus

Der Anpassungsprozess des aktuellen Ausrüstungskapitalbestands K_e an ein angestrebtes Niveau K_e^* wird üblicherweise durch den flexiblen Akzelerator beschrieben:

$$I_t = DK_t = b_t(K_t^* - K_t) \quad (2.1.1.1)$$

1 Hillinger (1963, 1966). Neuere Publikationen: z.B. Hillinger (1986a,b; 1987a,b)

2 z.B. Samuelson (1939), Hicks (1956)

D bezeichnet den Zeitableitungsoperator, $I_e = DK_e$ die Nettoausstattungsinvestitionen und b_e die Geschwindigkeit der Anpassung. Diesem Ansatz liegt die Idee zugrunde, daß K_e nur stetig veränderbar ist. Unter der Annahme quadratisch in I_e angesetzter Anpassungskosten läßt sich (2.1.1.1) aus einem mikroökonomischen Optimierungskalkül herleiten.¹

In dieser Gleichung sind Nettoinvestitionen direkt mit dem Kapitalfehlbestand $(K_e^* - K_e)$ gekoppelt. Hillinger wendet hiergegen ein, daß der gewünschte Kapitalbestand K_e^* u.a. von Gewinnerwartungen abhängig ist und diese als leicht veränderlich bekannt sind, Ausrüstungsinvestitionen hingegen technischen Restriktionen und längerfristigen Bindungen unterliegen und nicht kostenfrei verändert werden können. Eine direkte Proportionalität wie in (2.1.1.1) ist daher nicht plausibel. Hillinger schlägt daher vor, Gleichung (2.1.1.1) nicht als unmittelbare Bestimmungsgleichung für tatsächlich realisierte Investitionen I_e , sondern vielmehr als Gleichung für deren angestrebtes Niveau I_e^* zu interpretieren:

$$I_e^* = b_e (K_e^* - K_e) \quad (2.1.1.2)$$

Hinsichtlich der tatsächlichen Investitionen I_e wird ein Anpassungsprozeß an ihr angestrebtes Niveau angenommen:

$$DI_e = c_e (I_e^* - I_e) \quad (2.1.1.3)$$

Durch Einsetzen von (2.1.1.2) in (2.1.1.3) ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in K_e :

$$D^2 K_e = c_e [b_e (K_e^* - K_e) - DK_e] \quad (2.1.1.4)$$

Ihre Lösung kann in der Form

$$K_e(t) = K_e^h(t) + K_e^p(t) \quad (2.1.1.5)$$

¹ Siehe Kapitel 2.2.

Konjunkturmodelle von Hillinger

geschrieben werden, wobei $K_e^p(t)$ als partikuläre Lösung von K_e^* abhängig ist und im Kontext geschlossener Modelle (vgl. u.) als Gleichgewichtslösung interpretiert werden kann. $K_e^h(t)$ bezeichnet eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Das zugehörige charakteristische Polynom

$$P_e(x) = x^2 + c_e x + b_e c_e \quad (2.1.1.6)$$

besitzt die Wurzeln

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-c_e \pm \sqrt{c_e^2 - 4b_e c_e} \right] \quad (2.1.1.7)$$

woraus ersichtlich ist, daß $K_e^h(t)$ stets stabil und für $c_e < 4b_e$ periodisch ist. Die Annahme, daß gewünschte Änderungen des Kapitalbestandes viel schneller vollzogen als Investitionen tatsächlich verändert werden, d.h.

$$b_e \gg c_e \quad (2.1.1.8)$$

ermöglicht eine approximierende Vereinfachung von Gleichung (2.1.1.4) zu

$$D^2 K_e = a_e (K_e^* - K_e) \quad , \quad a_e = b_e c_e \quad (2.1.1.9)$$

Der homogene Teil von Gleichung (2.1.1.9) impliziert Oszillationen konstanter Amplitude um einen von K_e^* abhängigen Gleichgewichtspfad:

$$K_e(t) = A_e \cos(\omega_e t - S_e) \quad , \quad \omega_e = \sqrt{a_e} \quad (2.1.1.10)$$

wobei A_e und S_e durch Anfangsbedingungen gegeben sind. Die Periode T_e der Oszillation beträgt

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{a_e}} \quad (2.1.1.11)$$

Die Einfachheit dieses Konzepts macht es zu einer nützlichen und hilfreichen Basis für weitere Überlegungen. Im Gegensatz zu anderen Konjunkturmodellen

wird das Auftreten von Zyklen nur auf das Verhalten des Investitionssektors, nicht auf die Interaktion mehrerer Sektoren zurückgeführt.

DK_e trägt die Dimension einer Veränderung oder Geschwindigkeit, D^2K_e die einer Beschleunigung; daher ist es angebracht, die Gleichungen (2.1.1.4) und (2.1.1.9) als Akzelerator-Gleichungen zu bezeichnen. Da dieser Begriff jedoch bereits belegt ist, schlägt Hillinger die Bezeichnung **Akzelerator zweiter Ordnung** vor.

Dieses elementare Modell des Ausrüstungszyklus kann auf einfache Weise zu einem Modell zyklischen Wachstums geschlossen werden. Das Modell wird nachfolgend kurz analysiert, um zu einfachen Aussagen über relative Phasenlagen der Zyklen in den verschiedenen Modellvariablen zu gelangen. Der Wachstumsaspekt ist in Hinblick auf die spätere Untersuchung des Aggregationsproblems unerheblich; da er jedoch nur eine geringfügige Komplikation der mathematischen Diskussion darstellt, wird er in die Darstellung aufgenommen.

Im einfachsten geschlossenen Modell des Ausrüstungszyklus wird die Wirtschaft als aus zwei Sektoren bestehend betrachtet:

- (i) einem Unternehmenssektor, der den gewünschten Kapitalbestand K_e^* und die Ausrüstungsinvestitionen I_e bestimmt, und
- (ii) einem Nachfragesektor, der die Nachfrage Z_e bestimmt.

Konjunkturmodelle von Hillinger

Bei dieser Wahl der Variablen enthält Z_e auch Lagerinvestitionen. Diese unterliegen einem kurzen Zyklus, der im Rahmen dieses Modells nicht erklärt wird. Diese Problematik wird durch die Betrachtung eines Modells beider Zyklen aufgelöst (vergleiche Kapitel 2.1.3 unten). An dieser Stelle wird der gesamte Output Q nur in Ausrüstungsinvestitionen und Nachfrage aufgeteilt:

$$Q = I_e + Z_e \quad (2.1.1.12)$$

Um Ausrüstungsinvestitionen zu erklären, wird Gleichung (2.1.1.9) modifiziert zu :

$$DI_e = D^2 K_e = a_e (K_e^* - K_e) + f_e Z_e, \quad (2.1.1.13)$$

wobei f_e einen positiven Wachstumsparameter bezeichnet. Die Begründung für den zusätzlichen Beitrag $f_e Z_e$ liegt in Wachstumserwartungen: Die Ausrüstungsinvestitionen entsprechen nicht nur dem momentanen Kapitalfehlbestand, sondern werden auch entsprechend der langfristigen Wachstumsentwicklung erhöht. Diese wird von allen Modellvariablen am besten durch die Nachfrage beschrieben, da diese als stabil und wenig schwankend gilt. Der exakte Wert von f_e ist durch eine Gleichgewichtsbedingung festgelegt (Gleichung (2.1.1.25) unten).

Der gewünschte Kapitalbestand wird als proportional zur Nachfrage angesetzt:

$$K_e^* = k_e Z_e, \quad k_e > 0 \quad (2.1.1.14)$$

Für die Nachfrage wird ein angestrebtes Niveau Z_e^* proportional zum Output Q angenommen:

$$Z_e^* = z_e Q, \quad 0 < z_e < 1, \quad (2.1.1.15)$$

während die Dynamik von Z_e durch die Anpassungsgleichung

$$DZ_e = d_e (Z_e^* - Z_e) + g_e Z_e, \quad d_e, g_e > 0, \quad (2.1.1.16)$$

beschrieben wird. Der zweite Term in Gleichung (2.1.1.16) impliziert, daß auch der Nachfragesektor Wachstumserwartungen besitzt. Aufgrund der tatsächlich beobachteten Stabilität der Nachfrage wird dieser Term als führend betrachtet.

Mit der Bezeichnung

$$s_1 = 1 - z_1 \quad (2.1.1.17)$$

erhält man insgesamt ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$Dy_1 = A_1 y_1 \quad (2.1.1.18)$$

mit

$$y_1 = \begin{pmatrix} K_1 \\ I_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ und } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 k_1 + f_1 \\ 0 & d_1 z_1 & g_1 - d_1 s_1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1.19)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom

$$P_1(x) = \det(xE_3 - A_1) \quad (2.1.1.20)$$

kann in der Form

$$P_1(x) = (x - g_1) [x^2 + d_1 s_1 x + \alpha_1 (1 - d_1 k_1 z_1) + d_1 (g_1 s_1 - f_1 z_1)] + d_1 [g_1 (g_1 s_1 - f_1 z_1) + \alpha_1 (s_1 - g_1 k_1 z_1)] \quad (2.1.1.21)$$

geschrieben werden. Die Berechnung seiner Wurzeln kann durch die Annahme von Gleichgewichtsbedingungen vereinfacht werden.

Fordert man nämlich die Existenz einer Gleichgewichtslösung, für die die aktuellen und angestrebten Werte der Investitionen und der Nachfrage übereinstimmen:

$$K_1 = K_1^*, \quad Z_1 = Z_1^* \quad (2.1.1.22)$$

so ergeben sich aus

$$K_1 = k_1 Z_1, \quad Z_1 = z_1 \bar{Q}, \quad \bar{Q} = I_1 + Z_1 \quad (2.1.1.23)$$

und

$$DK_e = I, \quad DI_e = f \cdot Z, \quad DZ_e = g \cdot Z, \quad (2.1.1.24)$$

folgende Restriktionen für die Parameter g_e und f_e :

$$g_e = \frac{s_e}{k_e \cdot z_e}, \quad f_e = k_e \cdot g_e^2 = \frac{s_e \cdot g_e}{z_e}. \quad (2.1.1.25)$$

Die Bedingung an g_e ist die bekannte Harrod-Domar-Bedingung für gleichgewichtiges Wachstum, wobei $k_e z_e$ den Gleichgewichtskapitalkoeffizienten bezeichnet. Gelten diese Relationen, so vereinfacht sich das charakteristische Polynom zu

$$P_e(x) = (x - g_e)[x^2 + d_e s_e x + a(1 - d_e k_e z_e)] \quad (2.1.1.26)$$

Die erste Wurzel, $x_1 = g_e$, entspricht der Gleichgewichtswachstumsrate, die zugehörige Eigenlösung dem gleichgewichtigen Wachstumspfad. Die nachfolgende Diskussion wird sich auf den konjunkturellen Anteil, d.h. die Wurzeln x_2, x_3

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}[-d_e s_e \pm i\sqrt{4a_e(1 - d_e k_e z_e) - d_e^2 s_e^2}] \quad (2.1.1.27)$$

des quadratischen Teils von $P_e(x)$ konzentrieren. Das Modell besitzt komplexe Eigenwerte für

$$4a_e(1 - d_e k_e z_e) > d_e^2 s_e^2 \quad (2.1.1.28)$$

Da der Parameter d_e aufgrund der empirisch beobachteten Stabilität der Nachfrage als klein angenommen werden darf, kann (2.1.1.28) als erfüllt gelten. Das Modell besitzt daher oszillierende Lösungen.

Im Grenzfall $d_e = 0$ vereinfacht sich die Diskussion beträchtlich. Es ergeben sich die Systemmatrix zu

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_e & 0 & a_e k_e + f_e \\ 0 & 0 & g_e \end{pmatrix}. \quad (2.1.1.29)$$

das charakteristische Polynom zu

$$P_s(x) = (x - g_s)(x^2 + a_s) \quad (2.1.1.30)$$

und die Eigenwerte zu

$$x_1 = g_s, \quad x_{2,3} = \pm i\omega_s = \pm i\sqrt{a_s}. \quad (2.1.1.31)$$

In diesem Fall ist die Nachfrage stabil bezüglich Oszillationen und wächst exponentiell mit der Rate g_s ; dem Wachstum von Ausrüstungskapital und -investitionen sind Oszillationen überlagert, die durch das elementare Akzeleratormodell (Gleichungen (2.1.1.9) und (2.1.1.10) oben) beschrieben werden können.

Im allgemeineren Falles $d_e > 0$ werden zur Diskussion der Oszillationen die Eigenlösungen $y_{2,3}(t)$ zu den Eigenwerten $x_{2,3}$ des Systems (2.1.1.18) betrachtet. Sie besitzen die Darstellung

$$y_{2,3}(t) = y_{2,3}^* \exp(x_{2,3}t), \quad (2.1.1.32)$$

wobei $y_{2,3}^*$ Eigenvektoren von A_e , d.h. nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$(x_{2,3}E_3 - A_e)y_{2,3}^* = 0 \quad (2.1.1.33)$$

bezeichnen.¹ Da d_e als klein angenommen werden darf, wird die Berechnung der Eigenvektoren und der hieraus abgeleiteten Phasenbeziehungen auf Approximationen erster Ordnung in d_e beschränkt. In dieser Genauigkeit kann (2.1.1.27) zu

$$x_{2,3} = -\frac{d_s s_s}{2} \pm i\omega_s \left(1 - \frac{d_s k_s z_s}{2}\right) \quad (2.1.1.34)$$

vereinfacht werden. Nach einiger Rechnung unter Verwendung von

¹ Eine Einführung in Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen geben z.B. Hirsch/Smale (1974).

$$(x_{2,3})^2 = -a_s(1 - d_s k_s z_s) \mp i\omega_s d_s s_s. \quad (2.1.1.35)$$

ergeben sich die Eigenvektoren $y_{2,3}$ als:

$$y_{2,3}' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,3} \\ d_s \frac{a_s k_s z_s \mp i\omega_s s_s}{a_s k_s + f_s} \end{pmatrix} \quad (2.1.1.36)$$

Vernachlässigung von Wachstum (d.h. $g_e=0$, $f_e=0$, $z_e=1$, $s_e=0$) führt zu folgender Vereinfachung:

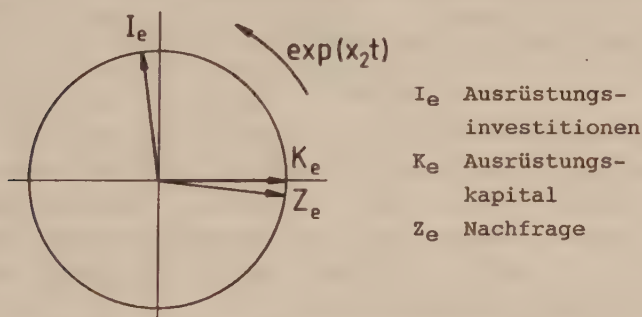
$$y_{2,3}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega_s \left(1 - \frac{d_s k_s}{2}\right) \\ d_s \end{pmatrix} \quad (2.1.1.37)$$

Aus den Eigenvektoren können die Phasen- und Amplitudenrelationen zwischen den Zyklen in den einzelnen Variablen abgelesen werden.

Die Amplitudenverhältnisse, d.h. die relative Stärke der Zyklen in den einzelnen Variablen, ergeben sich allgemein als Beträge der Quotienten der Eigenvektorkomponenten. In der Skalierung der Eigenvektoren gemäß (2.1.1.36) und (2.1.1.37) ist die Komponente des Kapitalbestandes gleich eins; in diesem Fall sind die Amplituden der Zyklen in den übrigen Variablen (relativ zu derjenigen im Kapitalbestand) direkt durch die Beträge der entsprechenden Eigenvektorkomponenten gegeben. Somit ist aus ersichtlich, daß die Nachfrage (in der vorliegenden Näherung) mit einer zu d_e proportionalen Amplitude schwankt; der obige Fall stabiler Nachfrage ordnet sich hierunter als Grenzfall $d_e=0$ ein.

Die relativen Phasen der Zyklen in den einzelnen Variablen sind allgemein durch die komplexen Phasen¹ der Quotienten der Eigenvektorkomponenten bestimmt. Sie lassen sich im Phasendiagramm verdeutlichen, welches die (skalierten) Einzelkomponenten in der komplexen Ebene zeigt. Ein Phasendiagramm für Gleichung (2.1.1.36) ist in Abbildung 2.1.1 dargestellt. Es zeigt, daß der Zyklus der Nachfrage in etwa in Phase mit dem des Ausrüstungskapitalbestandes steht und beide dem Zyklus der Ausrüstungsinvestitionen mit einer Verzögerung von ca. einer Viertelperiode folgen.

Abb. 2.1.1: Phasendiagramm des Ausrüstungszyklus



Der Zyklus in den Ausrüstungsinvestitionen führt um etwa eine Viertelperiode vor denjenigen im Kapitalbestand und in der Nachfrage

1 In diesem Zusammenhang ist die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen relevant:

$$a + ib = r e^{i\phi} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

Die Größe ϕ wird als komplexe Phase bezeichnet. Die komplexen Phasen in (2.1.1.37) beispielsweise lauten $(0, \pm \pi/2, 0)$.

2.1.2 Lagerzyklus

Bei der Modellierung von Lagerinvestitionen wird angenommen, daß Lagerbestände K_i als Puffer gehalten werden, um die Produktion Q relativ zur Nachfrage Z_i zu glätten. Im reinen Lagermodell umfaßt die Nachfrage Z_i sowohl Konsum als auch Ausrüstungsinvestitionen, welche ihrerseits einem langen Zyklus (Ausrüstungszyklus, vgl. voriges Kapitel) unterliegen. Die nachfolgende Darstellung ist auf die Diskussion des Lagerzyklus beschränkt, das Problem der Koexistenz und Interaktion beider Zyklen wird in Kapitel 2.1.3 behandelt.

Lagerinvestitionen I_i resultieren aus der Differenz zwischen Produktion und Nachfrage:

$$I_i = DK_i = Q - Z_i \quad (2.1.2.1)$$

Unternehmungen entscheiden unmittelbar nur über die Produktion, nicht über die Nachfrage. Es wird angenommen, daß Veränderungen der Produktion Anpassungskosten verursachen. Daher wird die Produktion nicht spontan verändert, sondern vielmehr stetig an das jeweilig angestrebte Niveau Q^* angepaßt:

$$DQ = c_q(Q^* - Q) \quad , \quad c_q > 0 \quad (2.1.2.2)$$

Das angestrebte Produktionsniveau resultiert aus der aktuellen Nachfrage Z_i und den geplanten Lagerinvestitionen I_i^* :

$$Q^* = I_i^* + Z_i \quad (2.1.2.3)$$

Die geplanten Lagerinvestitionen werden so bemessen, daß der aktuelle Lagerbestandes K_i seinem gewünschten Niveau K_i^* angepaßt wird:

$$I_i^* = b_i(K_i^* - K_i) \quad , \quad b_i > 0 \quad (2.1.2.4)$$

Insgesamt erhält man folgende dynamische Gleichung für die Produktion:

$$DQ = c_q [b_i (K_i^* - K_i) - I_i] \quad (2.1.2.5)$$

Im Spezialfall konstanter Nachfrage ergibt sich:

$$D^2 K_i = c_q [b_i (K_i^* - K_i) - I_i]. \quad (2.1.2.6)$$

Gleichung (2.1.2.6) ist formal äquivalent mit (2.1.1.4) und bedarf daher keiner weiteren Analyse. Für realistische Werte von b_i und c_q besitzt (2.1.2.6) zyklische Lösungen mit schwach gedämpften, im Grenzfall konstanten Amplituden.

Unter der Annahme

$$b_i \gg c_q, \quad (2.1.2.7)$$

d.h. Veränderungen der Produktion sind langsam gegenüber gewünschten Lagerveränderungen, können die Gleichungen (2.1.2.5) und (2.1.2.6) zu

$$DQ = a_i (K_i^* - K_i) \quad , \quad a_i = b_i c_q, \quad (2.1.2.8)$$

bzw.

$$D^2 K_i = a_i (K_i^* - K_i) \quad , \quad a_i = b_i c_q, \quad (2.1.1.9)$$

vereinfacht werden. Die Gleichungen (2.1.2.5), (2.1.2.6), (2.1.2.8) und (2.1.2.9) sind Akzeleratorgleichungen zweiter Ordnung, da Veränderungen von Flüssen mit Beständen verknüpft werden. Sie können in Analogie zu den Überlegungen zum Ausrüstungszyklus **Akzelerator zweiter Ordnung der Produktion** genannt werden.

Das Konzept des Akzelerators zweiter Ordnung der Produktion kann durch Endogenisierung des Nachfragesektors zu einem geschlossenen Wachstumsmodell erweitert werden. Hierzu wird die Anpassungsgleichung

Konjunkturmodelle von Hillinger

(2.1.2.8) der Produktion um einen Beitrag ergänzt, der bei ausgeglichenen Lagerbeständen ein zur Nachfrage proportionales Wachstum vorsieht:

$$DQ = a_i(K_i^* - K_i) + f_q Z_i \quad , \quad f_q > 0 \quad (2.1.2.10)$$

Auch der gewünschte Kapitalbestand wird als proportional zur Nachfrage angesetzt:

$$K_i^* = k_i Z_i \quad , \quad k_i > 0 \quad (2.1.2.11)$$

Die Dynamik der Nachfrage wird als Anpassungsprozess der Form

$$DZ_i = d_i(Z_i^* - Z_i) + g_i Z_i \quad , \quad d_i, g_i > 0 \quad (2.1.2.12)$$

beschrieben, wobei Z_i^* das angestrebte Nachfrageniveau bezeichnet. Bei ausgeglichener Nachfrage entspricht der zweite Term in Gleichung (2.1.2.12) einer Wachstumsrate g_i . Da der Beobachtung zufolge die Nachfrage allgemein nur relativ geringen Schwankungen unterworfen ist, kann der Wachstumsterm als führend betrachtet werden.

Die angestrebte Nachfrage wird als proportional zur Produktion angenommen:

$$Z_i^* = z_i Q \quad , \quad z_i > 0 \quad (2.1.2.13)$$

Das Modell kann in Form eines linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung geschrieben werden:

$$Dy_i = A_i y_i \quad (2.1.2.14)$$

mit

$$y_i = \begin{pmatrix} K_i \\ Q \\ Z_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -a_i & 0 & a_i k_i + f_q \\ 0 & d_i z_i & g_i - d_i \end{pmatrix} \quad (2.1.2.15)$$

Dieses System wird in analoger Weise wie zuvor das Modell des Ausrüstungszyklus analysiert. Es bezeichne $s_i = 1 - z_i$ die Gleichgewichtsspartrate. Die Bestimmung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P_i(x) = (x - g_i) [x^2 + d_i x + a_i + d_i (g_i - z_i (a_i k_i + f_q))] + d_i [a_i (s_i - g_i k_i z_i) + g_i (g_i - f_q z_i)] \quad (2.1.2.16)$$

wird durch die Annahme der Existenz einer Gleichgewichtslösung

$$K_i = K_i^* \quad , \quad \bar{Q} = Q^* \quad , \quad Z_i = Z_i^* \quad (2.1.2.17)$$

erleichtert. Denn aus den Bedingungen

$$K_i = k_i Z_i \quad , \quad Z_i = z_i \bar{Q} \quad , \quad D K_i = \bar{Q} - Z_i \quad (2.1.2.18)$$

und

$$D \bar{Q} = f_q Z_i \quad , \quad D Z_i = g_i Z_i \quad (2.1.2.19)$$

können die Wachstumsparameter g_i und f_q zu

$$g_i = \frac{s_i}{k_i z_i} \quad \text{und} \quad f_q = \frac{g_i}{z_i} \quad (2.1.2.20)$$

bestimmt werden, wobei die Gleichung für g_i die Harrod-Domar-Bedingung dieses Modells ist. Mithilfe von (2.1.2.20) wird das charakteristische Polynom zu

$$P_i(x) = (x - g_i) [x^2 + d_i x + a_i (1 - d_i k_i z_i)] \quad (2.1.2.21)$$

vereinfacht. Hieraus ergeben sich als Eigenwerte des Systems:

$$x_1 = g_i \quad , \quad x_{2,3} = -\frac{d_i}{2} \pm i \sqrt{a_i (1 - d_i k_i z_i) - \frac{d_i^2}{4}} \quad (2.1.2.22)$$

Der Eigenwert x_1 entspricht der Gleichgewichtswachstumsrate g_i , die zugehörige Eigenlösung dem gleichgewichtigen Wachstumspfad.

Konjunkturmodelle von Hillinger

Aufgrund der tatsächlichen Stabilität der Nachfrage kann der Parameter d_1 als klein angenommen werden. Daher sind die Eigenwerte $x_{2,3}$ komplex und entsprechen oszillierenden Lösungen mit schwach gedämpften, im Grenzfall $d_1=0$ konstanten Amplituden. Mit einer Genauigkeit erster Ordnung in d_1 gilt:

$$x_{2,3} = -\frac{d_1}{2} \pm i\omega_1 \left(1 - \frac{d_1 k_1 z_1}{2} \right) \quad (2.1.2.23)$$

In dieser Genauigkeit errechnen sich die zugehörigen Eigenvektoren $y_{2,3}^i$ zu

$$y_{2,3}^i = \begin{pmatrix} K_{2,3}^i \\ Q_{2,3}^i \\ Z_{2,3}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,3} + d_1 p_1 \\ d_1 p_1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2.24)$$

mit

$$p_1 = \frac{a_1 z_1 \pm i\omega_1 g_1}{a_1 + g_1^2} \quad (2.1.2.25)$$

Die Schwankungen der Nachfrage sind klein von erster Ordnung in d_1 und verschwinden im Grenzfall $d_1=0$ (Dieses Resultat gilt streng, vgl. analoge Überlegungen im Kontext des Ausrüstungszyklus, Kapitel 2.1.1). Die Abschätzung

$$g_1 \ll \omega_1 = \sqrt{a_1}, \quad (2.1.2.26)$$

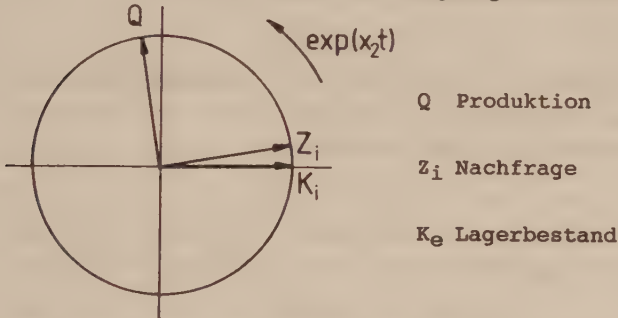
d.h. konjunkturbedingte Veränderungen des Lagerbestandes sind erheblich größer als wachstumsbedingte, zeigt, daß p_1 und somit auch $d_1 p_1$ in guter Näherung als reell angenommen werden können. Hieraus folgt, daß Oszillationen der Nachfrage in etwa phasengleich mit denen der Lagerbestände sind.

In der Eigenvektorkomponente $Q_{2,3}$ der Produktion beträgt der führende Beitrag $\pm i\omega_1$. Hieraus kann geschlossen werden, daß Oszillationen der Produktion denen der

Konjunkturmodelle von Hillinger

Lagerbestände und der Nachfrage um ca. eine Viertelperiode vorausseilen. Einen Gesamtüberblick über die Phasenlagen im Lagerzyklusmodell bietet das Phasendiagramm in Abbildung 2.1.2.

Abb. 2.1.2: Phasendiagramm des Lagerzyklus



Der Zyklus in der Produktion führt um etwa eine Viertelperiode vor denjenigen in der Nachfrage und im Lagerbestand.

2.1.3 Gesamtmodell

Die in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten Einzelmodelle des Ausrüstungszyklus und des Lagerzyklus werden nachfolgend in ein Gesamtmodell integriert, welches die Interaktion beider Zyklen beschreibt.

Als Modellvariablen dienen Nachfrage Z , Nettoausrustungsinvestitionen I_e und Ausrüstungskapital K_e , Produktion Q und Lagerbestand K_i .

Die Nachfrage Z umfaßt alle Verwendungen der Produktion Q außer Ausrüstungsinvestitionen I_e und Lagerinvestitionen $I_i = DK_i$. Ebenso wie bereits in den Einzelmodellen zuvor

Konjunkturmodelle von Hillinger

wird für die Nachfrage angenommen, sie unterliege Wachstumserwartungen und einem Anpassungsprozeß an das angestrebte Niveau Z^* :

$$DZ = d(Z^* - Z) + gZ \quad , \quad d, g > 0 \quad (2.1.3.1)$$

Als angestrebtes Niveau Z^* wird ein gewisser Anteil der Produktion angenommen:

$$Z^* = zQ \quad , \quad 0 < z < 1 \quad (2.1.3.2)$$

Das dynamische Verhalten der Ausrüstungsinvestitionen $I_e = DK_e$ ist wie in Gleichung (2.1.1.13) durch eine Akzeleratorgleichung gegeben:

$$DI_e = a_i(K_i^* - K_i) + f_i Z \quad , \quad a_i, f_i > 0 \quad (2.1.3.3)$$

wobei wie in (2.1.1.14) der angestrebte Kapitalbestand K_e^* als proportional zur Nachfrage angenommen wird:

$$K_i^* = k_i Z \quad , \quad k_i > 0 \quad (2.1.3.4)$$

Als Verhaltensgleichung der Produktion wird die Akzeleratorgleichung (2.1.2.10) angesetzt:

$$DQ = a_l(K_l^* - K_l) + f_l Z \quad , \quad a_l, f_l > 0 \quad (2.1.3.5)$$

wobei das angestrebte Niveau der Lagerbestände K_l^* proportional zur Summe von Nachfrage und Ausrüstungsinvestitionen gesetzt wird:

$$K_l^* = k_l(I_e + Z) \quad , \quad k_l > 0 \quad (2.1.3.6)$$

Diese Gleichungen können unter Beachtung der Identitäten

$$DK_e = I_e \quad \text{und} \quad I_e = DK_l = Q - I_e - Z \quad (2.1.3.7)$$

zu einem linearen Differentialgleichungssystem erster Ordnung zusammengefaßt werden:

Konjunkturmodelle von Hillinger

$$Dy = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} Z \\ I_s \\ K_s \\ Q \\ K_i \end{pmatrix} \quad (2.1.3.8)$$

$$\text{und} \quad A = \begin{pmatrix} g-d & 0 & 0 & d & 0 \\ a_s k_s + f_s & 0 & -a_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i k_i + f_i & a_i k_i & 0 & 0 & -a_i \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.3.9)$$

Das charakteristische Polynom $P(x) = \det(xE_5 - A)$ lautet:

$$\begin{aligned} P(x) = & (x-g)(x^2+a_s)(x^2+a_i) \\ & + d[x^4 - (a_i k_i + f_i)zx^3 \\ & + (a_s + a_i - ((a_s k_s + f_s)k_i + 1)a_i z)x^2 \\ & - (a_s a_i(k_s + k_i) + a_i f_s + a_s f_i)zx + a_s a_i(1-z)] \end{aligned} \quad (2.1.3.10)$$

Die Bestimmung der Eigenwerte $x_1, \dots, x_5$ als Nullstellen von $P(x)$ wird durch die Annahme autonom wachsender Nachfrage

$$d=0 \quad (2.1.3.11)$$

erheblich vereinfacht. In diesem Falle ergibt sich:

$$P(x) = (x-g)(x^2+a_s)(x^2+a_i) \quad (2.1.3.12)$$

und

$$x_1 = g, \quad x_{2,3} = \pm i\omega_s = \pm i\sqrt{a_s}, \quad x_{4,5} = \pm i\omega_i = \pm i\sqrt{a_i}. \quad (2.1.3.13)$$

Der erste Eigenwert entspricht exponentiellem Wachstum der Rate g . Das Wachstum ist gleichgewichtig, falls

$$\frac{1}{z} = 1 + (k_s + k_i)g + k_s k_i g^2 \quad \text{bzw.} \quad g \cong \frac{1-z}{(k_s + k_i)z} \quad (2.1.3.14)$$

und

$$f_s = k_s g^2 \quad , \quad f_g = \frac{1}{z} g \quad (2.1.3.15)$$

erfüllt sind (Gleichung (2.1.3.14) ist die Harrod-Domar-Bedingung dieses Modells).

Die Eigenwertpaare $x_{2,3}$ und $x_{4,5}$ entsprechen dem Ausrüstungs- bzw. Lagerzyklus. Die zugehörigen Eigenvektoren

$$y_{2,3}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2,3} \\ 1 \\ x_{2,3}(1 \pm i\omega_s k_i) \\ \frac{a_s}{a_i - a_s} \left(1 \pm i \frac{a_i k_i}{\omega_s} \right) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_{4,5}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{4,5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3.16)$$

zeigen, daß im Falle stabiler Nachfrage ($d=0$) der lange Zyklus (Ausrüstungszyklus) in I_e , K_e , Q und K_i , der kurze Zyklus (Lagerzyklus) hingegen nur in Q und K_i auftritt. Dieses entspricht den stilisierten Fakten für die Bundesrepublik Deutschland (vgl. Kapitel 1.2).

Wird auf die Bedingung stabiler Nachfrage ($d=0$) verzichtet, so treten beide Zyklen in allen Variablen auf. Die Berechnung der Eigenwerte ist komplizierter, da sie nicht direkt als Nullstellen von (2.1.3.10) bestimmt werden können. Betrachtet man jedoch speziell ihre Abhängigkeit vom Parameter d , so sind sie implizit durch

$$P(x(d), d) = 0 \quad (2.1.3.17)$$

gegeben und können für kleine d in Taylor-Approximation erster Ordnung berechnet werden:

$$x(d) \approx x(0) + d \cdot x'(0) \quad , \quad x'(0) = - \frac{\partial P / \partial d}{\partial P / \partial x} \left(\frac{x(0), 0}{x(0), 0} \right) \quad (2.1.3.18)$$

Durch Auswertung von (2.1.3.18) können die Eigenwerte und hiernach die Eigenvektoren des Systems näherungsweise bestimmt werden. Die Diskussion der zyklischen Lösungen kann durch Vernachlässigung von Wachstumseffekten, d.h. durch die Annahmen $g=0$, $f_e=0$, $f_q=0$ und $z=1$ vereinfacht werden, ohne daß hierdurch die qualitativen Resultate der Analyse beeinträchtigt werden. Die nachfolgende Darstellung macht von dieser Vereinfachung Gebrauch. Nach einiger Rechnung erhält man

$$x_{2,3} \cong d \cdot \frac{a_i a_i k_i}{2(a_i - a_s)} \pm i w_s \left[1 - d \cdot \frac{a_i k_i}{2(a_i - a_s)} \right] \quad (2.1.3.19)$$

und

$$\begin{aligned} x_{4,5} \cong & -d \cdot \frac{a_i - a_s + a_s a_i k_i k_i}{2(a_i - a_s)} \\ & \pm i w_i \left(1 + d \cdot \frac{a_s k_i + a_s k_i - a_i k_i}{2(a_i - a_s)} \right) \end{aligned} \quad (2.1.3.20)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren $y_{2,3}^0$ und $y_{4,5}^0$ errechnen sich (unter ausschließlicher Berücksichtigung führender Beiträge in d) zu

$$y_{2,3}^0 \cong \begin{pmatrix} d \frac{a_i}{a_i - a_s} (1 \pm i w_s k_i) \\ x_{2,3} \\ 1 \\ x_{2,3} (1 \pm i w_s k_i) \\ \frac{a_s}{a_i - a_s} \left(1 \pm i \frac{a_i k_i}{w_s} \right) \end{pmatrix} \quad (2.1.3.21)$$

und

Konjunkturmodelle von Hillinger

$$y_{4,5}^0 \approx \begin{pmatrix} d \\ \mp i \omega_i dk_i \frac{a_i}{a_i - a_s} \\ -dk_i \frac{a_i}{a_i - a_s} \\ x_{4,5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3.22)$$

Auf der Basis dieser Ergebnisse können die Eigenschaften der beiden Zyklen diskutiert werden.

Zunächst wird der Ausrüstungszyklus betrachtet. Die 1. Komponente von $y_{2,3}^0$ ist klein der Ordnung d ; hieraus folgt, daß die Nachfrage bezüglich des Ausrüstungszyklus nur geringfügig schwankt.

Der Parameter k_i bezeichnet die Relation zwischen dem gewünschten Lagerbestand und den Verkäufen ($Z+I_e$, vgl. (2.1.3.6)), genauer die Zeitspanne, innerhalb der der gewünschte Lagerbestand verkauft werden soll. Unter der Annahme, diese Zeitspanne sind erheblich kürzer als die Länge eines Konjunkturzyklus, gelten die Abschätzungen

$$k_i \ll \frac{\omega_i}{a_i}, \quad k_i \ll \frac{1}{\omega_i} \quad (2.1.3.23)$$

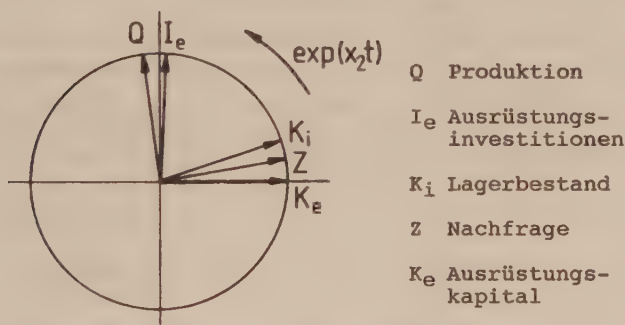
Nach (2.1.3.23) sind die 1. und 5. Komponente von $y_{2,3}$ nahezu reell und positiv, d.h. Ausrüstungskapital, Lagerbestand und Nachfrage sind bezüglich des langen Zyklus in etwa in Phase, wobei bei genauerer Betrachtung wegen

$$0 < \omega_i < \frac{a_i}{\omega_i} \quad (2.1.3.24)$$

die Phase des Lagerbestandes vor derjenigen der Nachfrage vor derjenigen der Ausrüstungskapitals führt. Dieser Variablengruppe gegenüber ist die zyklische Bewegung der Ausrüstungsinvestitionen und der Produktion in etwa um

die Phase von $x_{2,3}$, d.h. um ca. eine Viertelperiode voraus, wobei die Produktion den Ausrüstungsinvestitionen geringfügig vorausseilt. Eine vollständige Übersicht über die wechselseitigen Phasenlagen zeigt das Phasendiagramm in Abbildung 2.1.3.1.

Abb. 2.1.3.1: Phasendiagramm des Ausrüstungszyklus im Gesamtmodell



Der lange Zyklus in der Produktion und in den Ausrüstungsinvestitionen führt um etwa eine Viertelperiode vor denjenigen im Lagerbestand, in der Nachfrage und im Ausrüstungskapital

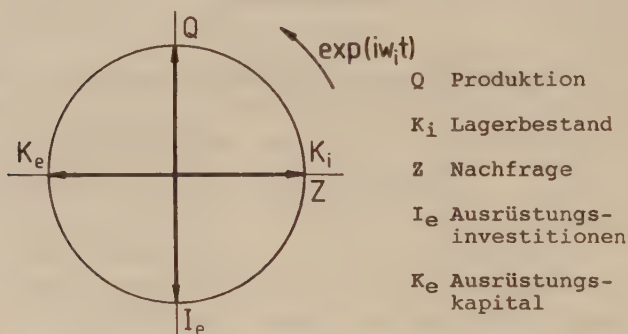
Der Lagerzyklus weist andere Eigenschaften auf: Die ersten drei Komponenten von $y_{4,5}^0$ in (2.1.3.22) sind klein von 1. Ordnung in d , d.h. Nachfrage, Ausrüstungsinvestitionen und Ausrüstungskapital schwanken nur geringfügig im kurzen Zyklus.

Das Vorzeichen der 1. Komponente ist positiv, das der 3. Komponente negativ. Hieraus folgt, daß im Lagerzyklus die Nachfrage gleichphasig, das Ausrüstungskapital hingegen antiphasig zum Lagerbestand oszilliert. Auch die

Konjunkturmodelle von Hillinger

Komponenten der Ausrüstungsinvestitionen und der Produktion sind zueinander gegenphasig und führen relativ zum Ausrüstungskapital bzw. dem Lagerbestand um jeweils eine Viertelperiode. Ein Phasendiagramm des kurzen Zyklus zeigt Abbildung 2.1.3.2.

Abb. 2.1.3.2: Phasendiagramm des Lagerzyklus im Gesamtmodell



Der kurze Zyklus der Produktion führt um eine Viertelperiode vor denjenigen der Nachfrage und des Lagerbestands, der kurze Zyklus der Ausrüstungsinvestitionen um eine Viertelperiode vor demjenigen des Ausrüstungskapitals. Die kurzen Zyklen des Ausrüstungssektors und des Produktions-/Lagersektors sind zueinander antiphasig.

Konjunkturmodelle von Hillinger

Die Ausführungen des Kapitels 2.1 können wie folgt zusammengefaßt werden:

Aufbauend auf dem Konzept des Akzelerators 2. Ordnung werden makroökonomische Modelle zyklischen Wachstums der Ausrüstungen und der Lager sowie ein Gesamtmodell beider Zyklen diskutiert. Diese Modelle lassen sich in der Form linearer Differentialgleichungssysteme 3.-5. Ordnung mit konstanten Parametern darstellen. Die Systeme besitzen oszillierende Eigenlösungen (Zyklen). Durch die (teilweise approximative) Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren werden für Lager- und Ausrüstungszyklus die Perioden sowie die Amplituden- und Phasenrelationen zwischen den einzelnen Komponenten bestimmt.

2.2 Mikroökonomische Grundlagen zyklischen Verhaltens und des Akzelerators zweiter Ordnung

In der vorhergehenden Diskussion der Konjunkturmodelle von Hillinger wurden die Grundgleichungen, die zum Akzelerator zweiter Ordnung führen, auf der Basis von Plausibilitätsüberlegungen aufgestellt. Diese Gleichungen und das Konzept des Akzelerators zweiter Ordnung können jedoch auch aus einem intertemporalen Optimierungsansatz abgeleitet werden.

Die Argumentation wird am Beispiel der Ausrüstungsinvestitionen gezeigt. Alle Variablen und Parameter beziehen sich auf den Ausrüstungssektor und tragen in der Notation der gesamten Arbeit das Subskript "e". Abweichend hiervon wird für dieses Kapitel im Sinne einer vereinfachten Darstellung auf das Subskript verzichtet.

Die nachfolgende Darstellung ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2.2.1 wird ein Kostenminimierungskalkül entwickelt, welches auf Abweichungen des Kapitalbestands von einem gegebenen gewünschten Niveau und Anpassungskosten beschränkt ist. Die sich hieraus ergebende dynamische Investitionsgleichung wird in Kapitel 2.2.2 für die Grenzfälle starker Gewichtung der Gegenwart (kurzer Voraussicht) und vollkommener Voraussicht diskutiert. In Kapitel 2.2.3 wird das eingeschränkte Kostenminimierungskalkül von Kapitel 2.2.1 in ein umfassendes Gewinnmaximierungskalkül integriert und hierdurch die Bestimmung des gewünschten Kapitalbestandes endogenisiert.¹

¹ Dieser Ansatz entspricht der in der Literatur üblichen Vorgehensweise bei der mikroökonomischen Begründung des flexiblen Akzelerators (1. Ordnung).

2.2.1 Minimierung von Anpassungskosten

In diesem Kapitel wird der angestrebte Kapitalbestand K^* als gegeben angenommen, und es werden allein die durch Kapitalfehlbestand und Anpassungen bedingten Kosten minimiert.

Folgende Annahmen werden getroffen:

- (i) Die Unternehmungen entscheiden über den zeitlichen Verlauf ihres Ausrüstungskapitals K und seiner ersten beiden Zeitableitungen (Nettoinvestitionen $I=DK$, ferner $D^2K=DI$). Der gewünschte Ausrüstungsbestand K^* ist exogen gegeben. Ein Kapitalfehlbestand $(K-K^*)$ sowie Anpassungen DK und D^2K verursachen Kosten C_K :

$$C = C_K(K - K^*, DK, D^2K) \quad (2.2.1.1)$$

- (ii) Unternehmen besitzen einen unendlichen Planungshorizont und minimieren den Gegenwartswert aller zukünftigen Anpassungskosten, die mit einer konstanten Rate ρ diskontiert werden. Demzufolge ist folgendes Integral zu minimieren:

$$\int_{t_0}^{\infty} C_K(K(t) - K^*(t), DK(t), D^2K(t)) e^{\rho(t_0 - t)} dt \quad (2.2.1.2)$$

Dieser Ansatz besitzt im Unterschied zum Gesamtoptimierungskalkül des Kapitels 2.2.3 den Vorteil, daß die Diskontrate ρ in verschiedener Weise interpretiert werden kann:

Im Falle vollkommener Voraussicht ist ρ als Zinssatz zu verstehen; für diesen Fall kann die nachfolgende Analyse in ein globales Gewinnmaximierungskalkül integriert werden, innerhalb dessen der angestrebte Kapitalbestand K^* endogen bestimmt wird (Kapitel 2.2.3).

Andererseits kann im Kontext konjunktureller Schwankungen in Bezug auf Abweichungen des Kapitals vom angestrebten (gleichgewichtigen) Niveau und Anpassungskosten auch eine stärkere Diskontierung angenommen werden - begründet durch fehlende Voraussicht über zukünftige konjunkturelle Entwicklungen. In diesem Fall sind für ρ größere Werte anzunehmen.

Die Kostenfunktion C_K wird als Summe von Beiträgen abhängig von $K-K^*$, DK und D^2K angesetzt. Diese werden in möglichst einfacher Form spezifiziert:

- (a) Beitrag abhängig von $K-K^*$: Zuviel Ausrüstungskapital verursacht Kosten in Form von vermeidbarer Kapitalbindung und erhöhten Abschreibungen; zuwenig Ausrüstungskapital verursacht Kosten durch fehlende Produktionsmöglichkeiten (entgangenen Gewinn) oder zu intensive Kapitalnutzung (z.B. Überstunden). Der gewünschte Kapitalbestand K^* liegt im dazwischenliegenden Kostenminimum. Kosten abhängig von K können daher im einfachsten Fall als quadratisch im Fehlbestand $(K-K^*)$ angenommen werden.
- (b) Beitrag abhängig von $DK=I$: Veränderungen des Ausrüstungskapitals verursachen Kosten, falls mit weiteren Faktoren (z.B. Arbeit) bei beschränkter Substituierbarkeit produziert wird. In einem solchen Fall können bei Schwankungen des Kapitalbestandes die übrigen Faktoren entweder technisch subeffizient oder ebenfalls schwankend eingesetzt werden. Die auf solche Weise entstehenden Kosten fallen sowohl bei positiven als auch bei negativen Bestandsveränderungen an (z.B. als Ausbildungskosten bzw. Abfindungen) und werden demnach als quadratisch in I angesetzt.

- (c) Beitrag abhängig von $D^2K=DI$:
 Ausrüstungsinvestitionen basieren zumeist auf längerfristigen Planungen und Bindungen. Manche Ausrüstungsgüter werden nur auftragsbezogen hergestellt und sind nicht ohne Wartezeiten lieferbar. Änderungen der Investitionen im Sinne kurzfristiger Planungskorrekturen sind daher mit Anpassungskosten verbunden, die im einfachsten Fall als quadratisch in DI angenommen werden.

Ingesamt ergibt sich die Kostenfunktion C_K zu

$$C_K(K, DK, D^2K) = a(K - K^*)^2 + \beta I^2 + \gamma (DI)^2 \quad (2.2.1.3)$$

Nach Annahme wird gemäß (2.2.1.2) das Integral über diese Funktion minimiert:

$$\min_{K, I, DI} \int_{t_0}^{\infty} [a(K - K^*)^2 + \beta I^2 + \gamma (DI)^2] e^{\rho(t_0 - t)} dt \quad (2.2.1.4)$$

Die Anfangswerte für Kapitalbestand und Investitionen, $K(t_0)$ und $I(t_0)$, sind vorgegeben. Als Transversalitätsbedingungen werden gefordert:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I \cdot e^{\rho(t_0 - t)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} DI \cdot e^{\rho(t_0 - t)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} D^2I \cdot e^{\rho(t_0 - t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.5)$$

Anschaulich bedeuten diese Bedingungen, daß Investitionen und ihre ersten beiden Zeitableitungen nicht schneller wachsen, als die Bewertung der Zukunft durch die Unternehmen abnimmt.

Mit den Techniken der Variationsrechnung¹ kann aus diesen Annahmen eine Differentialgleichung für $K(t)$ hergeleitet werden:

Eine (kleine) Änderung der Variablen der Kostenfunktion C_K um δK , δI , $\delta(DI)$ führt zu einer Kostenänderung δC_K

$$\begin{aligned}\delta C_K &= \frac{\partial C}{\partial K} \cdot \delta K + \frac{\partial C}{\partial I} \cdot \delta I + \frac{\partial C}{\partial DI} \cdot \delta(DI) \\ &= 2\alpha(K - K^*)\delta K + 2\beta I \delta I + 2\gamma DI \delta(DI)\end{aligned}\quad (2.2.1.6)$$

Gleichung (2.2.1.6) gilt für alle t . Eine Änderung von $[K(t), I(t), DI(t)]$ auf $[K(t) + \delta K(t), I(t) + \delta I(t), DI(t) + \delta(DI(t))]$ bewirkt somit eine Änderung des Kostenintegrals um

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_0}^{\infty} C_K(t) e^{\rho(t_0-t)} dt &= \int_{t_0}^{\infty} \delta C_K(t) e^{\rho(t_0-t)} dt \\ &= 2 \int_{t_0}^{\infty} \{ \alpha(K - K^*)\delta K + \beta I \delta I + \gamma DI \delta(DI) \} e^{\rho(t_0-t)} dt\end{aligned}\quad (2.2.1.7)$$

Im Kostenoptimum verschwindet der Wert dieses Integrals für beliebige (kleine) Abweichungen $[\delta K(t), \delta I(t), \delta(DI(t))]$ (Bedingung erster Ordnung für Extrema):

$$\delta \int_{t_0}^{\infty} C_K(t) e^{\rho(t_0-t)} dt = 0 \quad (2.2.1.8)$$

Im Optimum kann ein stetiger Verlauf der Variablen $K(t)$ und $I(t)$ angenommen werden. Da die Anfangswerte $K(t_0)$ und $I(t_0)$ gegeben sind, kann $\delta K(t_0) = 0$ und $\delta I(t_0) = 0$ gesetzt werden.

Durch ein- bzw. zweimalige partielle Integration gemäß

$$\int_a^b u(t) \cdot Dv(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b Du(t) \cdot v(t) dt \quad (2.2.1.9)$$

¹ Eine ausführliche Darstellung der Methoden der Variationsrechnung bieten z.B. Hadley/Kemp (1971).

werden in (2.2.1.7) $\delta I(t) = D\delta K(t)$ und $\delta DI(t) = D^2\delta K(t)$ in $\delta K(t)$ umgeformt:

$$\int_{t_0}^{\infty} \delta I \cdot I e^{\rho(t_0-t)} dt = - \int_{t_0}^{\infty} \delta K [DI - \rho I] e^{\rho(t_0-t)} dt \quad (2.2.1.10)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \delta (DI) \cdot DI e^{\rho(t_0-t)} dt = \int_{t_0}^{\infty} \delta K [D^3I - 2\rho D^2I + \rho^2 DI] e^{\rho(t_0-t)} dt \quad (2.2.1.11)$$

Die Randbeiträge der partiellen Integration verschwinden infolge der Anfangsbedingungen bzw. der Transversalitätsbedingungen. Insgesamt ergibt sich:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{\infty} C_K(t) e^{\rho(t_0-t)} dt \quad (2.2.1.12)$$

$$= 2 \int_{t_0}^{\infty} \{ \alpha (K - K^*) + \beta [\rho I - DI] + \gamma [\rho^2 DI - 2\rho D^2I + D^3I] \} \delta K(t) e^{\rho(t_0-t)} dt$$

Da (2.2.1.12) für beliebige Abweichungen $\delta K(t)$ gilt, muß der Beitrag innerhalb $\{ \}$ identisch verschwinden, d.h.

$$\alpha (K - K^*) + \beta [\rho DK - D^2K] + \gamma [\rho^2 D^2K - 2\rho D^3K + D^4K] = 0 \quad (2.2.1.13)$$

Diese Differentialgleichung 4. Ordnung beschreibt die optimale Dynamik von $K(t)$ im oben spezifizierten Sinn. Das Auftreten zyklischer Lösungen ist von den Parametern α , β , γ und ρ abhängig. Im nachfolgenden Kapitel 2.2.2 werden die Grenzfälle großer und kleiner Werte von ρ untersucht.

2.2.2 Grenzfälle starker und schwacher Diskontierung

In diesem Kapitel wird Gleichung (2.2.1.13) näher betrachtet. Aus Gründen mathematischer Einfachheit ist

die Analyse auf die Grenzfälle großer ρ (starke Gegenwartspräferenz, kurze Voraussicht) und kleiner ρ (vollkommene Voraussicht) beschränkt.

Grenzfall starker Diskontierung

In diesem Fall beschreibt die Gewichtungsfunktion $\exp(-\rho t)$ die schnell abfallende Bewertung der Zukunft durch die Unternehmen, die durch Ungewißheit über zukünftige konjunkturelle Schwankungen begründet werden kann. Ein Maß für die Stärke des Abfalls ist die Zeit $1/\rho$, innerhalb der Wert der Gewichtungsfunktion auf $1/e$, d.h. ca. ein Drittel des Ausgangswerts abfällt. Wird diese als kurz im Vergleich zur Periode konjunktureller Schwankungen, d.h. ρ als entsprechend groß angenommen, so sind die Terme ρDK und $\rho^2 D^2 K$ in den eckigen Klammern von (2.2.1.13) jeweils führend.

Die Diskussion von Gleichung (2.2.1.13) wird in zwei Stufen durchgeführt: Zuerst werden nur die bezeichneten führenden Terme betrachtet und alle übrigen Beiträge vernachlässigt. Diese Näherung führt direkt zu den Gleichungen des Akzelerators zweiter Ordnung. Hierauf (ab Gleichung (2.2.2.7)) wird unter der Vereinfachung $\beta=0$ die Gültigkeit der Ergebnisse bei Hinzunahme des nächstgrößeren Beitrags $-\rho D^3 K$ untersucht.

Die führenden Terme bezüglich ρ in (2.2.1.13) ergeben

$$\alpha(K - K^*) + \beta \rho DK + \gamma \rho^2 D^2 K = 0 \quad (2.2.2.1)$$

Gleichung (2.2.2.1) ist formalidentisch mit Gleichung (2.1.1.4) des Akzelerators 2. Ordnung. Sie besitzt die Wurzeln

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\gamma\rho} \left[-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right] \quad (2.2.2.2)$$

und kann in gleicher Weise interpretiert werden:

Bei der Herleitung des Akzelerators 1. Ordnung bleiben Kosten von Investitionsschwankungen unberücksichtigt. Dieser Zusammenhang kann in der vorliegenden Ausführung nachvollzogen werden: Die Annahme $\gamma=0$ in (2.2.2.1) führt zur Akzeleratorgleichung 1. Ordnung (vgl. (2.1.1.1)):

$$DK = \frac{\alpha}{\beta\rho}(K^* - K) \quad (2.2.2.3)$$

Zur Herleitung des Akzelerators 2. Ordnung wird diese Gleichung den Ausführungen in Kapitel 2.1.1 zufolge als Gleichung für gewünschte Investitionen I^* anstelle von tatsächlichen Investitionen $I=DK$ interpretiert (vgl. (2.1.1.2)) und diese jenen angepaßt. Auflösung von Gleichung (2.2.2.1) nach $D^2K=DI$ gibt dieses wieder:

$$\begin{aligned} DI &= \frac{1}{\gamma\rho^2}[\alpha(K^* - K) - \beta\rho DK] \\ &= \frac{\beta}{\gamma\rho} \left[\frac{\alpha}{\beta\rho}(K^* - K) - DK \right] \\ &= \frac{\beta}{\gamma\rho} [I^* - I] \end{aligned} \quad (2.2.2.4)$$

Dieses entspricht Gleichung (2.1.1.3). Die Anpassungsparameter b_e , c_e und a_e der Gleichungen (2.1.1.2), (2.1.1.3) und (2.1.1.9) stehen in folgendem Zusammenhang mit den Kostenparametern α , β und γ :

$$b_e = \frac{\alpha}{\beta\rho} \quad , \quad c_e = \frac{\beta}{\gamma\rho} \quad , \quad a_e = \frac{\alpha}{\gamma\rho^2} \quad (2.2.2.5)$$

Die vereinfachende Annahme $b_e \gg c_e$, die zu Zyklen konstanter Amplitude führt (vgl. (2.1.1.8)), ist hiernach äquivalent zu der Ungleichung

$$\alpha\gamma \gg \beta^2 \quad (2.2.2.6)$$

Somit ist unter der Voraussetzung unvollständiger Voraussicht konjunktureller Schwankungen eine mikroökonomische Begründung des Konzepts des Akzelerators 2. Ordnung gegeben.

Diese Herleitung erfolgte aus (2.2.1.13) unter ausschließlicher Berücksichtigung führender Terme in ρ . Nachfolgend wird die Stabilität der Ergebnisse unter Hinzunahme des nächstgrößeren Beitrags $-2\rho D^3K$ untersucht. Vereinfachend wird $\beta=0$ gesetzt (vgl. (2.2.2.6) und Text). Es ergibt sich hiernach

$$\alpha(K - K^*) + \gamma\rho^2 D^2K - 2\gamma\rho D^3K = 0 \quad (2.2.2.7)$$

Zur Bestimmung der Wurzeln des charakteristischen Polynoms $P(x)$

$$P(x) = \alpha + \gamma\rho^2 x^2 - 2\gamma\rho x^3 \quad (2.2.2.8)$$

wird $y=1/x$ gesetzt und

$$\rho(y) = \alpha y^3 + \gamma\rho^2 y - 2\gamma\rho = 0 \quad (2.2.2.9)$$

betrachtet. Unter Verwendung bekannter Lösungsformeln¹ errechnen sich die Nullstellen y_1, y_2, y_3 zu

$$y_1 = -2R \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right), \quad (2.2.2.10)$$

$$y_{2,3} = R \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right) \pm i\sqrt{3}R \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right)$$

mit den Bezeichnungen

$$R = -\rho\sqrt{\frac{\gamma}{3\alpha}}, \quad \phi = -\operatorname{arsinh}\left(\frac{3}{\rho^2}\sqrt{\frac{3\alpha}{\gamma}}\right) \quad (2.2.2.11)$$

Werden in den Reihendarstellungen der hyperbolischen Funktionen²

1 Bronstein/Semendjajew (1985), S.132

2 Bronstein/Semendjajew (1985), S. 34

$$\sinh(\psi) = \psi + \frac{\psi^3}{6} + \dots, \quad \cosh(\psi) = 1 + \frac{\psi^2}{2} + \dots \quad (2.2.2.12)$$

nur die führenden Beiträge berücksichtig, so folgt:

$$y_1 \cong \frac{2}{\rho}, \quad y_{2,3} \cong -\frac{1}{\rho} \pm i\rho \sqrt{\frac{y}{a}} \quad (2.2.2.13)$$

plus Korrekturen der Größenordnung $1/\rho^3$. Die Wurzeln x_1, x_2, x_3 des charakteristischen Polynoms $P(x)$ ergeben sich hiernach zu

$$x_1 \cong \frac{\rho}{2}, \quad x_{2,3} \cong -\frac{1}{\rho^3} \sqrt{\frac{a}{y}} \pm i \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{a}{y}} \quad (2.2.2.14)$$

Diese Wurzeln werden mit den Werten aus (2.2.2.2) verglichen. Wird in (2.2.2.2) $\beta=0$ gesetzt, ergibt sich:

$$x_{1,2} = \pm i \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{a}{y}} \quad (2.2.2.15)$$

Folgende Aussagen können getroffen werden:

- (i) Die Hinzunahme des Terms $-2\rho D^3K$ in der Diskussion von Gleichung (2.2.1.13) beeinträchtigt nicht das grundsätzliche Auftreten komplexer Wurzeln (zyklischer Lösungen).
- (ii) Der Vergleich zwischen (2.2.2.15) und den komplexen Wurzeln $x_{2,3}$ in (2.2.2.14) zeigt übereinstimmende Imaginärteile (bezgl. führender Terme in ρ) und eine Abweichung der Ordnung $1/\rho^3$ der Realteile.
- (iii) Der Wert von ρ beeinflusst empfindlich ($1/\rho^3$) die Dämpfung der zyklischen Lösungen. Dieses kann auf einfache Weise interpretiert werden: Voraussicht wirkt dämpfend auf zyklisches Verhalten.

Grenzfall schwacher Diskontierung

Im Fall vollkommener Voraussicht ist die Diskontrate ρ als Zinssatz zu interpretieren und nimmt kleine Werte an. Aus Gründen der Einfachheit ist die nachfolgende Analyse auf den Grenzfall verschwindender ρ beschränkt. Aus (2.2.1.13) ergibt sich für $\rho=0$:

$$\alpha(K - K^*) - \beta D^2 K + \gamma D^4 K = 0 \quad (2.2.2.16)$$

Das charakteristische Polynom

$$\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4 \quad (2.2.2.17)$$

ist quadratisch in x^2 ; daher sind die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 direkt zu bestimmen. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

$$1.) \quad y=0: \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (2.2.2.18)$$

$$2.) \quad \beta=0: \quad x_{1,2,3,4} = (\pm 1 \pm i) \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}$$

$$3.) \quad \beta, \gamma \neq 0: \quad x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\gamma}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}}$$

Die Transversalitätsbedingungen (2.2.1.5) lauten für $\rho=0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} DI(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} D^2 I(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.2.19)$$

Demzufolge sind nur Wurzeln mit negativem Realteil von Interesse.

Der 1. Fall in (2.2.2.18) führt zu genau einer negativen reellen Wurzel entsprechend dem Akzelerator 1. Ordnung.¹

Der 2. Fall ergibt ein komplex konjugiertes Wurzelpaar mit negativem Realteil; die Betragsgleichheit der Real- und Imaginärteile impliziert stark gedämpfte Oszillationen (In einer Periode nimmt die Schwingungsamplitude um den Faktor $\exp(-2\pi)$, d.h. ca. 1/500 ab.)

Im 3. Fall sind abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante der inneren Wurzel zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} 3a.) \quad 1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} \geq 0: \quad x_{1,2,3,4} &= \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\gamma}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}} \\ 3b.) \quad 1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 0: \quad x_{1,2,3,4} &= \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\gamma}} \cdot \sqrt{1 \pm i \sqrt{\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} - 1}} \end{aligned} \quad (2.2.2.20)$$

Fall 3a enthält zwei reelle negative Wurzeln. Die optimale Lösung besteht daher aus der Überlagerung zweier unterschiedlich schnell abfallender Exponentialfunktionen.²

Fall 3b ergibt ein komplex konjugiertes Wurzelpaar mit negativem Realteil. Der Betrag der Imaginärteile ist kleiner als derjenige des Realteils, daher ist die Dämpfung noch stärker als im oben diskutierten 2. Fall.

1 Die Lösung besteht in diesem Fall aus einer einzigen abnehmenden Exponentialfunktion. Hiermit kann nur eine Anfangsbedingung (für $K(t_0)$) erfüllt werden. Dieses ist jedoch unbedenklich: Da für $\gamma=0$ Veränderungen der Investitionen kostenfrei sind, ist die Anfangsbedingung für $I(t_0)$ bedeutungslos.

2 Da zwei Anfangsbedingungen (für $K(t_0)$ und $I(t_0)$) zu erfüllen sind, sind i.a. beide Beiträge von Null verschieden.

Vollkommene Voraussicht impliziert demzufolge in allen Fällen exponentiell fallende oder stark gedämpft oszillierende Lösungen.

2.2.3 Gewinnmaximierung

In der bekannten Literatur über Anpassungskosten wird der flexible Akzelerator (erster Ordnung) aus einem umfassenderen Gewinnmaximierungskalkül abgeleitet und K^* hierbei endogen (aus den Eigenschaften der Produktionsfunktion) bestimmt.¹ Eine Erweiterung der obenstehenden Ausführungen um eine derartige endogene Bestimmung von K^* ist möglich. Gleichung (2.2.1.13) ergibt sich hierbei in gleicher Weise, wobei K^* entsprechend der o.g. Beziehung bestimmt und ρ als Zinssatz zu interpretieren ist.

Folgende Annahmen werden getroffen:

- (i) Die Unternehmen produzieren einen Output Q mit den Faktoren Kapital K und Arbeit L . Die eingesetzte Technologie ist durch die Produktionsfunktion

$$Q = F(K, L) \quad (2.2.3.1)$$

gegeben.

- (ii) Veränderungen des Kapitalbestands sowie der Nettoinvestitionen verursachen jeweils Anpassungskosten², die mit $C_1(I)$ bzw. $C_2(DI)$ bezeichnet werden. Veränderungen des Arbeitseinsatzes sind kostenfrei.

1 z.B. Lucas (1967), Gould (1968), Treadway (1971), Mortensen (1973)

2 Siehe Kapitel 2.2.1.

- (iii) Die Unternehmen verhalten sich als Preisnehmer auf allen Märkten. Die Preise des Outputs p_Q und der Kapitalgüter p_K , die Löhne p_L sowie der Zinssatz ρ sind konstant. Der Gewinn π zur Zeit t errechnet sich aus

$$\pi(t) = p_Q Q(t) - p_L L(t) - p_K I(t) - C_1(I) - C_2(DI) \quad (2.2.3.2)$$

- (iv) Es herrscht vollkommene Voraussicht. Die Unternehmen maximieren den Gegenwartswert $V(t_0)$ ihrer zukünftigen Gewinne, die sie mit der Zinsrate ρ diskontieren:

$$V(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \pi(t) e^{\rho(t_0-t)} dt \quad (2.2.3.3)$$

- (v) Die Anfangswerte des Kapitalbestandes und der Investitionen sind gegeben. Als Transversalitätsbedingungen werden gefordert (vgl. (2.2.1.5):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C'_1(I) \cdot e^{\rho(t_0-t)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} C'_2(DI) \cdot e^{\rho(t_0-t)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} DC'_2(DI) \cdot e^{\rho(t_0-t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.5)$$

Aus diesen Bedingungen kann mit den Methoden der Variationsrechnung das optimale Unternehmerverhalten bestimmt werden. Die Vorgehensweise ist analog zu den obigen Ausführungen (Kapitel 2.2.1) und wird daher an dieser Stelle nur knapp dargestellt.

Die Variation $\delta V(t_0)$ des zu maximierenden Gegenwartswerts errechnet sich zu

$$\delta V(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \{ p_0 [F_K(K, L) \delta K + F_L(K, L) \delta L] - p_L \delta L - p_K \delta I - C'_1(I) \delta I - C'_2(DI) \delta(DI) \} e^{\rho(t_0-t)} dt \quad (2.2.3.5)$$

Durch partielle Integration werden die Beiträge von δI und δDI in Beiträge von δK transformiert (vgl. (2.2.1.9)-(2.2.1.11)):

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{\infty} [p_K + C'_1(I)] \delta I e^{\rho(t_0-t)} dt \\ & = \int_{t_0}^{\infty} [-\rho p_K - \rho C'_1(I) + DC'_1(I)] \delta K e^{\rho(t_0-t)} dt \end{aligned} \quad (2.2.3.6)$$

und

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{\infty} C'_2(DI) \delta(DI) e^{\rho(t_0-t)} dt \\ & = - \int_{t_0}^{\infty} [D^2 C'_2(DI) - 2\rho DC'_2(DI) + \rho^2 C'_2(DI)] \delta K e^{\rho(t_0-t)} dt \end{aligned} \quad (2.2.3.7)$$

Die Randbeiträge der partiellen Integration verschwinden wegen der Anfangs- und Transversalitätsbedingungen. Aus (2.2.3.5), (2.2.3.6) und (2.2.3.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta V(t_0) &= \int_{t_0}^{\infty} \{ [p_0 F_K(K, L) - \rho p_K - \rho C'_1(I) + DC'_1(I) \\ & \quad - \rho^2 C'_2(DI) + 2\rho DC'_2(DI) - D^2 C'_2(DI)] \delta K \\ & \quad + [p_0 F_L(K, L) - p_L] \delta L \} e^{\rho(t_0-t)} dt \end{aligned} \quad (2.2.3.8)$$

Im Optimum verschwindet δV für beliebige Variationen δK und δL (Bedingung 1. Ordnung). Daher müssen die Beiträge in [] identisch verschwinden.

Im angestrebten Gleichgewicht (K^*, L^*) fallen keine Anpassungskosten an. Gleichung (2.2.3.8) ohne die Beiträge von C_1 und C_2 ergibt folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$p_Q F_K(K^*, L) = \rho p_K \quad , \quad p_Q F_L(K, L) = p_L \quad (2.2.3.9)$$

Die Bedingungen (2.2.3.9) stimmen mit den bekannten Resultaten der statischen Analyse überein. Unter Berücksichtigung der Anpassungskosten folgt eine dynamische Gleichung für K, I, DI :

$$\begin{aligned} p_Q F_K(K, L) - \rho p_K - \rho C'_1(I) + DC'_1(I) \\ - \rho^2 C'_2(DI) + 2\rho DC'_2(DI) - D^2 C'_2(DI) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.3.10)$$

Da nach Annahme keine Anpassungskosten für Veränderungen des eingesetzten Produktionsfaktors Arbeit anfallen, resultiert keine dynamische Gleichung für L ; vielmehr wird zum vorliegenden Kapitalbestand K ohne Verzögerung der optimale Arbeitsinput L gemäß (2.2.3.9, rechts) gewählt.

Linearisierung von (2.2.3.10) in der Nähe des Gleichgewichts ergibt:

$$\begin{aligned} p_Q F_K(K^*, L) + p_Q F_{KK}(K^*, L)(K - K^*) - \rho p_K - \rho C''_1(0)I \\ + C''_1(0)DI - \rho^2 C''_2(0)DI + 2\rho C''_2(0)D^2I - C''_2(0)D^3I = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3.11)$$

und wegen (2.2.3.9) folgt:

$$\begin{aligned} -p_Q F_{KK}(K^*, L)(K - K^*) + C''_1(0)[\rho DK - D^2K] \\ + C''_2(0)[\rho^2 D^2K - 2\rho D^3K + D^4K] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.3.12)$$

Gleichung (2.2.3.12) ist formal identisch mit (2.2.1.13); unter der Annahme fallender Grenzerträge und positiver Anpassungskosten stimmen auch die Vorzeichen überein.

Allerdings kann nicht auf Gleichung (2.2.2.1) geschlossen werden, und alle Näherungen und Schlußfolgerungen, die auf der Annahme kurzer Voraussicht

(große Werte von ρ) basieren, sind unzutreffend. Anstelle dessen ergeben sich Resultate, welche denjenigen von Gleichung (2.2.2.16) und folgenden entsprechen.¹

Die bekannte Herleitung des Akzelerators erster Ordnung ordnet sich diese Untersuchung ein, wenn angenommen wird, daß Investitionen kostenfrei veränderbar sind (d.h. $C_2(DI)=0$). Gleichung (2.2.3.12) lautet hiermit

$$-p_0 F_{KK}(K^*, L)(K - K^*) + C_1'(0)[\rho DK - D^2 K] = 0 \quad (2.2.3.13)$$

und besitzt das charakteristische Polynom

$$C_1'(0)x^2 - C_1'(0)\rho x + p_0 F_{KK}(K^*, L) \quad (2.2.3.14)$$

mit den Wurzeln

$$x_{1,2} = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \frac{p_0 F_{KK}(K^*, L)}{C_1'(0)}} \quad (2.2.3.15)$$

Unter der Annahme fallender Grenzerträge ($F_{KK}(K^*, L) < 0$) ist die Diskriminante in (2.2.3.15) positiv. Das System besitzt zwei reelle Wurzeln, von denen genau eine negativ ist und dem Akzelerator 1. Ordnung entspricht.

Ein hiervon abweichendes Resultat wird jedoch unter der Voraussetzung positiver Skalenerträge ($F_{KK}(K^*, L) > 0$) erhalten²: In diesem Fall kann die Diskriminante negativ sein. Ist dieses der Fall, so besitzt (2.2.3.14) komplex konjugierte Wurzeln mit positivem Realteil und impliziert Oszillationen mit exponentiell anwachsenden, im Grenzfall $\rho=0$ konstanten Amplituden.

1 Die dort getroffene vereinfachende Annahme verschwindender Diskontrate ist für die endogene Bestimmung des gewünschten Kapitalbestandes K^* in Strenge offensichtlich ungeeignet. Als Näherung in der Gleichung für die Anpassungsdynamik ist sie jedoch unkritisch.

2 Diese Idee verdanke ich Herrn Professor H.-W. Sinn.

Mikroökonomische Grundlagen zyklischen Verhaltens

Eine Übersicht über alle Ergebnisse der Kapitel 2.2.1-2.2.3 zeigt nachfolgende Tabelle:

Schwache Diskontierung:		Starke Diskontierung:	
Minimierung von Kapitalfehlbestands- und Anpassungskosten (Kostenfunktion $C_K(K, DK, D^2K) = \alpha(K-K^*)^2 + \beta I^2 + \gamma(DI)^2$)			
Dynamische Gleichung: Differentialgleichung 4. Ordnung			
Exponentiell fallende oder stark gedämpft zyklische Lösungen		Akzelerator 2. Ordnung	
Spezialfall $\gamma=0$: Akzelerator 1. Ordnung		Spezialfall $\beta=0$: Zyklen konstanter Amplitude	
		Spezialfall $\gamma=0$: Akzelerator 1. Ordnung	
Globale Gewinnmaximierung $\pi = p_Q F(K, L) - p_L L - p_K I - C_1(I) - C_2(DI)$			
Dynamische Gleichung: wie oben			
Spezialfall $C_2(DI)=0$:			
$F_{KK} < 0$:	$F_{KK} > 0$:		
Akzelerator 1. Ordnung	Zyklische Lösungen möglich		

Mikroökonomische Grundlagen zyklischen Verhaltens

Die dargestellten Resultate können wie folgt zusammengefaßt werden:

Ein intertemporaler Optimierungsansatz von Kapitalfehlbestandskosten und Anpassungskosten bezüglich Investitionen und deren Veränderung führt zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung, welche in den Grenzfällen starker und schwacher Diskontierung auf einfache Weise untersucht werden kann. Im Grenzfall starker Diskontierung (kurzer Voraussicht) führt sie zum Konzept des Akzelerators 2. Ordnung und impliziert Zyklen fallender oder konstanter Amplitude. Eine Verringerung der Diskontierung wirkt dämpfend auf zyklisches Verhalten; im Grenzfall schwacher Diskontierung ergeben sich exponentiell fallende oder stark gedämpft zyklische Lösungen. Sind Veränderungen der Investitionen kostenfrei, so resultiert der Akzelerator 1. Ordnung.

Unter der Annahme langfristiger Voraussicht kann dieses Kalkül zu einem globalen Gewinnmaximierungsansatz erweitert werden, in welchem der gewünschte Kapitalbestand endogen bestimmt wird. Die resultierende dynamische Gleichung ist formalidentisch mit derjenigen des obigen eingeschränkten Optimierungsansatzes. Der Spezialfall verschwindender Anpassungskosten bezüglich der Veränderung von Investitionen entspricht der bekannten Ableitung des Akzelerators 1. Ordnung. Positive Skalenerträge ermöglichen explodierende Zyklen.

Folgende Gesichtspunkte sind von besonderem Interesse:

- (i) Das Konzept des Akzelerators 2. Ordnung kann mikroökonomisch begründet werden.
- (ii) Voraussicht wirkt dämpfend auf zyklisches Verhalten (Ausnahme u.U. bei Skalenerträgen).
- (iii) Die Optimalität zyklischen Verhaltens kann nicht grundsätzlich verneint werden.

2.3 Disaggregierte Reinterpretation

Einsektorale Modelle können unmittelbar als Modelle einzelner Wirtschaftssubjekte interpretiert werden. Demgemäß werden in der folgenden Analyse die vereinfachten Akzeleratorgleichungen (2.1.1.9) und (2.1.2.8) als Verhaltensgleichungen der einzelnen Unternehmungen gelesen. Diese Betrachtungsweise wird der Untersuchung des Aggregationsproblems zugrundegelegt.

Gleichung (2.1.1.9) beschreibt die Dynamik von Ausrüstungsinvestitionen gemäß dem Akzelerator 2. Ordnung. Wird diese Gleichung auf ein einzelnes Unternehmen angewandt, so ist der homogene Teil seiner Investitionsdynamik allein von seiner eigenen Vergangenheit bestimmt und in der Lage, ein autonom zyklisches Verhalten zu generieren.

In disaggregierter Reinterpretation erhält Gleichung (2.1.1.9) die Form

$$D^2 K_{e,n} = w_{e,n}^2 (K_{e,n}^* - K_{e,n}) \quad , \quad w_{e,n}^2 = a_{e,n} \quad , \quad (n = 1, \dots, U), \quad (2.3.1)$$

wobei n den Index der Einzelunternehmung bezeichnet. Die Gesamtzahl U aller Unternehmungen unterliegt keinerlei Beschränkungen, jedoch ist intendiert, daß U entsprechend realen Volkswirtschaften große Werte annimmt. Die allgemeine Lösung von Gleichung (2.3.1) lautet

$$K_{e,n}(t) = A_{e,n} \cos(w_{e,n}t - S_{e,n}) = B_{e,n} \cos(w_{e,n}t) + C_{e,n} \sin(w_{e,n}t), \quad (2.3.2)$$

wobei $A_{e,n}$ und $S_{e,n}$ sowie $B_{e,n} = A_{e,n} \cos(S_{e,n})$ und $C_{e,n} = A_{e,n} \sin(S_{e,n})$ durch Anfangsbedingungen festgelegte unternehmensspezifische Konstanten bezeichnen.

Vollkommen analog läßt sich das Modell des Lagerzyklus disaggregiert reinterpretieren. Die Gleichungen (2.1.2.8)

Disaggregierte Reinterpretation

und (2.1.2.9) für die Produktion bzw. die Lagerinvestitionen (bei stabiler Nachfrage) lauten in disaggregierter Reformulierung

$$DQ_n = w_{i,n}^2 (K_{i,n}^* - K_{i,n}) \quad (n = 1, \dots, U) \quad (2.3.3)$$

und

$$D^2 K_{i,n} = w_{i,n}^2 (K_{i,n}^* - K_{i,n}) \quad (n = 1, \dots, U), \quad (2.3.4)$$

wobei wie oben n den Index der Einzelunternehmung bezeichnet. Diese Gleichungen implizieren individuell verschiedene Produktions- und Lagerinvestitionszyklen auf Unternehmensebene.

Somit geht dieses Modell von zyklischem Verhalten der Einzelunternehmungen sowohl hinsichtlich der Ausrüstungsinvestitionen als auch der Produktion aus. Über Periodenlängen und Phasenlagen der einzelnen Zyklen werden keine Annahmen getroffen. Insbesondere wird diesbezüglich nicht die Gleichartigkeit aller Unternehmungen im Sinne eines typischen Repräsentanten gefordert.

Wenn dieses Vorgehen gerechtfertigt ist, d.h. wenn einzelne Unternehmungen in der Lage sind, autonome und individuell verschiedene Zyklen zu erzeugen, dann sollten diese empirisch nachweisbar sein, ja sogar klarer erscheinen als Zyklen in aggregierten Daten.

Um dieser Frage nachzugehen, wurde am Seminar für mathematische Wirtschaftstheorie der Universität München begonnen, disaggregierte Daten zu analysieren. Untersucht wurde das dynamische Verhalten der Produktion dreier bundesdeutscher Automobilhersteller (Volkswagen, Opel und Daimler-Benz) mit den bislang nur auf aggregierte Daten angewandten Methoden; Abbildung 2.3.1 zeigt die hierbei

Disaggregierte Reinterpretation

erhaltenen Spektren¹. Die Spektren von Volkswagen und Daimler-Benz sind von je einem einzigen scharfen Maximum dominiert, auf welches der überwiegende Teil der spektralen Masse konzentriert ist. Im Falle von Opel ist die Struktur des Spektrums komplizierter; dieses ist nicht überraschend, da Opel als Tochtergesellschaft von General Motors die Vorstellung von einem autonomen Unternehmen nur schlecht erfüllt. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Hauptmaxima der drei Spektren bei 11.9, 8.4 und 6.4 Jahren über 5.5 Jahre streuen, obwohl es sich um Unternehmen derselben Branche handelt. Nur eine der Periodenlängen (Volkswagen: 8.4 Jahre) fällt in etwa mit derjenigen eines der aggregierten Zyklen der Bundesrepublik zusammen.

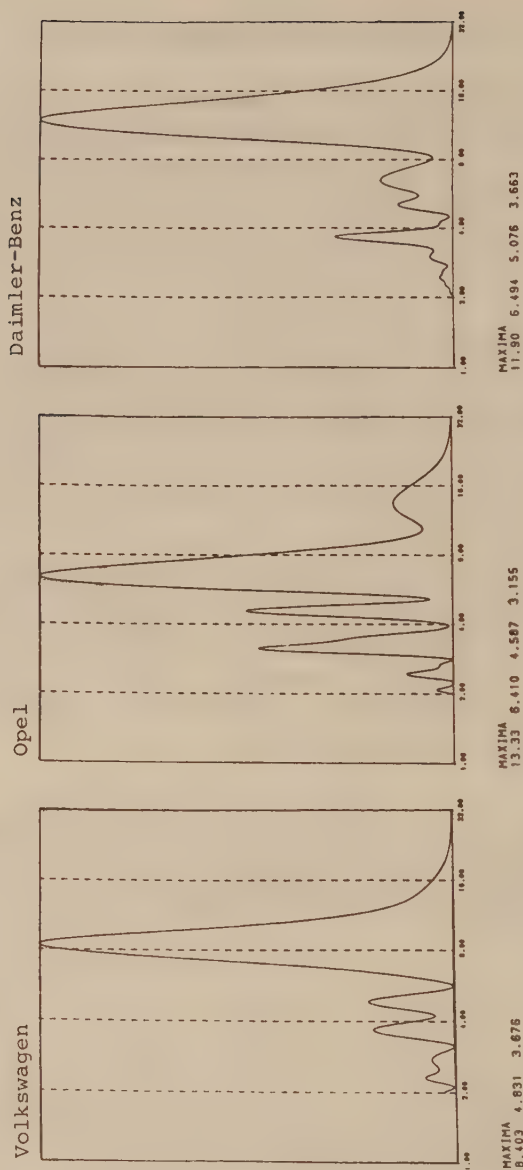
Nach dieser ersten Untersuchung läßt sich feststellen, daß auf mikroökonomischer Ebene individuell verschiedene Zyklen von außerordentlicher Deutlichkeit nachzuweisen sind. Hiernach erscheint die Modellierung einzelunternehmerischen Verhaltens gemäß obigen Gleichungen als gerechtfertigt.

Das Verhalten der Aggregate ergibt sich durch Summation der einzelnen Unternehmensbeiträge. Der aggregierte Ausrüstungsbestand K_e etwa errechnet sich zu

¹ Datenbasis: Produktion in Gütereinheiten, Quellen: Jahresberichte der Unternehmen. Spektralanalytische Methoden: entsprechend der Untersuchung makroökonomischer Reihen (vergl. z.B. Hillinger (1987a)).

Diese Studie wurde im Rahmen einer Seminararbeit von Frau C. Köbele am Seminar für mathematische Wirtschaftstheorie durchgeführt.

Ungeglättete Spektren der Produktion in Gütereinheiten



Diese Studie wurde von Frau C. Köbele erstellt.

Abbildung 2.3.1:

Automobilproduktion dreier bundesdeutscher Hersteller

Disaggregierte Reinterpretation

$$\begin{aligned}
 K_e(t) &= \sum_{n=1}^U K_{e,n}(t) = \sum_{n=1}^U A_{e,n} \cos(\omega_{e,n}t - S_{e,n}) \\
 &= \sum_{n=1}^U B_{e,n} \cos(\omega_{e,n}t) + \sum_{n=1}^U C_{e,n} \sin(\omega_{e,n}t)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.5}$$

Das Aggregationsproblem besteht nunmehr in der Frage nach dem Resultat einer derartigen Summation und seiner Vereinbarkeit mit der aggregierten Modellformulierung (Abschnitt 2.1). Kein Aggregationsproblem läge vor, wenn sich das Resultat exakt oder approximativ in der Form

$$K_e(t) = A_e \cos(\omega_e t - S_e) \tag{2.3.6}$$

darstellen ließe, wobei A_e , ω_e und S_e geeignet gewählte Mittelwerte der Verteilungen der individuellen Parameter waren. Wie nachfolgend gezeigt wird, ist eine solche Darstellung jedoch nur in restriktiven Spezialfällen, im allgemeinen jedoch nicht möglich.

Die Annahme der Gleichheit aller $\omega_{e,n}$ ($\omega_{e,n} = \omega_e$, $n=1, \dots, U$) führt zu einer Lösung der Form (2.3.6):

$$K_e(t) = B_e \cos(\omega_e t) + C_e \sin(\omega_e t); \quad B_e = \sum_{n=1}^U B_{e,n}; \quad C_e = \sum_{n=1}^U C_{e,n} \tag{2.3.7}$$

Aufgrund der individuellen Phasenlagen der Einzeloszillationen und der hierdurch bedingten Auslöschung kann a priori jedoch nicht auf eine von Null verschiedene Amplitude der aggregierten Lösung geschlossen werden. Amplituden und Phasen der Einzeloszillationen hängen nur von Anfangsbedingungen ab und sind keine strukturellen Parameter der Verhaltensgleichung (2.3.1), daher können im Rahmen der Modelldiskussion keine Schlüsse über sie gezogen werden. Um dennoch aggregierte Zyklen zu erhalten, muß eine hierzu notwendige Phasenstruktur der Einzeloszillationen im Rahmen der Anfangsbedingungen postuliert werden.

Für den Einfluß von Anfangsbedingungen gibt es empirische Hinweise: Bei den von Hillinger (1986a) untersuchten OECD-Ländern wurde beobachtet, daß regelmäßigere und klarere Ausrüstungszyklen in den Daten derjenigen Länder auftreten, die den Zweiten Weltkrieg verloren haben, als derjenigen, welche ihn gewonnen haben. Eine Erklärung hierfür wäre, daß die Kapitalbestände der Verlierernationen weitgehend zerstört waren und die Unternehmungen dieser Länder ihr Kapital ungefähr zur gleichen Zeit wieder aufbauen mußten und hierdurch in gleiche Phasenlage gebracht wurden.

Die Synchronisation der Anfangsphasen allein bietet jedoch keine hinreichende Antwort auf das Aggregationsproblem, falls auf die oben formulierte Bedingung der Gleichheit aller Parameter $w_{e,n}$ verzichtet wird. In diesem Falle nämlich besitzen die Einzeloszillationen verschiedene Periodenlängen, was auch bei synchronen Startphasen im weiteren zeitlichen Verlauf zu divergierenden Phasenlagen und Auslöschungseffekten¹ führt.

In Abbildung 2.3.2 ist eine solche Situation illustriert: Gezeigt ist die Aggregation über 5 Einzelunternehmungen. Das dynamische Verhalten ihrer Ausrüstungsinvestitionen gehorcht jeweils einer Gleichung vom Typ (2.3.1), wobei die angestrebten Niveaus $K_{e,n}^*$ konstant gesetzt sind und die einzelnen Akzeleratorkoeffizienten $a_{e,n}$ unterschiedliche Werte (90%, 95%, 100%, 105% und 110% ihres Mittelwerts) besitzen. Die Einzelunternehmen beschreiben Zyklen konstanter Amplitude mit Periodenlängen von etwa 95%, 97.5%, 100%, 102.5% und 105% einer mittleren Dauer. Die Phasen der einzelnen Zyklen

¹ Einige Autoren (z.B. Goodwin (1983b), vgl. unten) sprechen in diesem Zusammenhang von "Dissipation" und wachsender "Entropie".

DISAGGREGIERTER AUSRUESTUNGSZYKLUS

5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN UND
UNTERSCHIEDLICHEN AKZELERATORKOEFFIZIENTEN

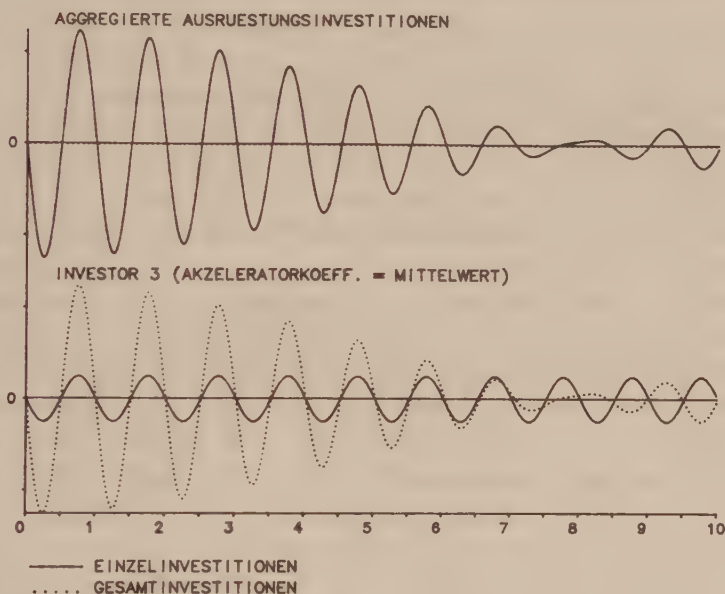


Abbildung 2.3.2.a:

Überlagerung von fünf Unternehmenszyklen unterschiedlicher
Perioden.

Akzeleratorkoeffizienten: 90%, 95%, 100%, 105%, 110%

ihres Mittelwerts

entsprechend Periodendifferenzen von ca. 0%, $\pm 2.5\%$, $\pm 5\%$

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS

5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN UND
UNTERSCHIEDLICHEN AKZELERATORKOEFFIZIENTEN

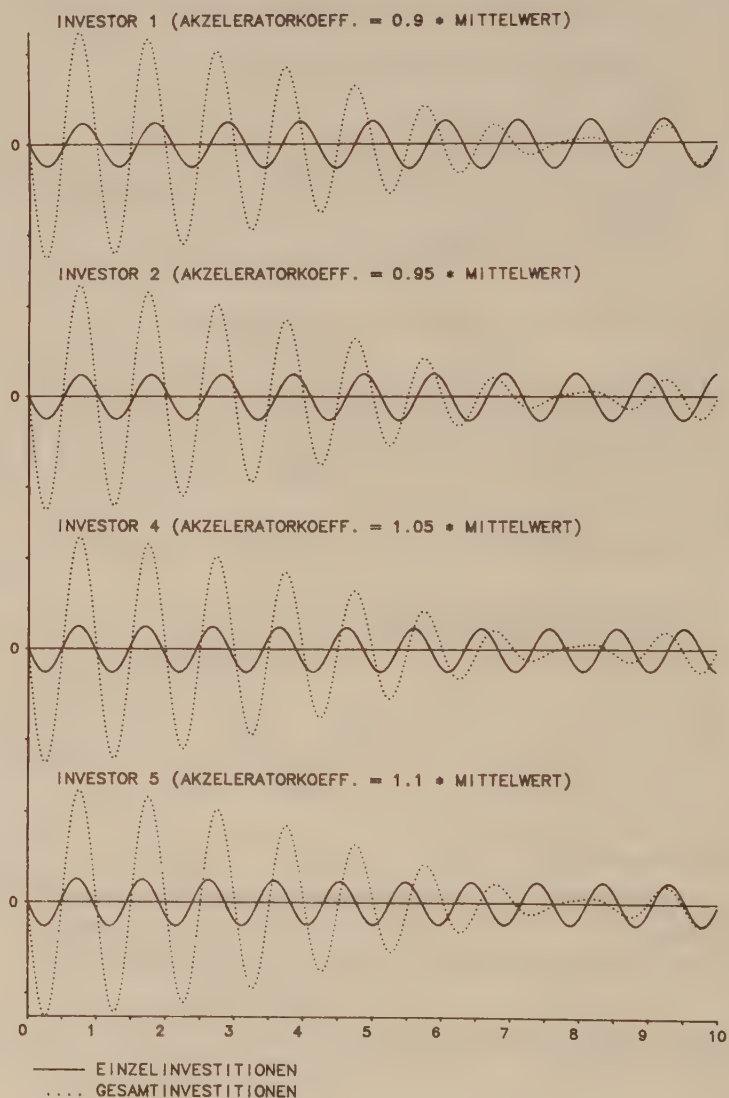


Abbildung 2.3.2.b

Disaggregierte Reinterpretation

sind anfangs synchron und divergieren im zeitlichen Verlauf. Dieses führt zu einer abnehmenden Amplitude des aggregierten Zyklus. Offenbar existiert für das Aggregat in diesem Falle keine Darstellung der Form (2.3.6).

Die Stärke des Auslöschungseffekts ist keineswegs gering: Im gezeigten Beispiel beträgt die Abweichung der Periodenlängen vom Mittelwert ca. $\pm 5\%$ und führt zu einer Amplitudenhalbierung nach etwa 5 Perioden. Verdoppelt man die Abweichung der Periodenlängen vom Mittelwert auf ca. $\pm 10\%$, so nimmt die Gesamtamplitude bereits nach zweieinhalb Perioden auf etwa ein Drittel des Ausgangswerts ab (Dieses kann von dem ersten Teilbild der Abbildung 3.3.2.2a, Kapitel 3.3.2 abgelesen werden). Eine derartige Abnahme der Amplitude ist mit beobachteten makroökonomischen Zyklen nicht vereinbar, obgleich die angenommenen Streuung von $\pm 10\%$ angesichts der Resultate aus dem Bereich der Automobilhersteller als äußerst zurückhaltende Annahme gelten darf.

Das Beispiel des Auslöschungseffekts zeigt, daß aggregierte und disaggregierte Formulierung desselben Modells (Gleichungen (2.1.1.9) und (2.3.1)) widersprüchliche Aussagen (konstante vs. stark veränderliche Amplitude des aggregierten Zyklus) treffen können. Im Modell ist das Aggregationsproblem nur auf die gezeigte Weise unter der Annahme der Gleichheit aller $w_{e,n}$ zu lösen. Die beobachtete Verschiedenheit der Unternehmenszyklen der untersuchten drei deutschen Automobilhersteller legt es jedoch nahe, auf derartige Annahmen zu verzichten.

Makroökonomische Zyklen mit annähernd konstanter Amplitude erweisen sich nach diesen Überlegungen als durchaus unerklärt: Aggregierte Modelle auf der Grundlage typischer Repräsentanten stehen im Widerspruch zum

Disaggregierte Reinterpretation

mikroökonomischen Befund, disaggregiert reinterpetierte Modelle mit individuell verschiedenen Unternehmenszyklen hingegen sagen im Widerspruch zur Beobachtung auf aggregierter Ebene Auslöschungseffekte und stark abfallende Amplituden der Zyklen voraus.

Eine Klärung dieses Konflikts kann nur durch eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Aggregationsproblem erzielt werden. Ein in diesem Sinne befriedigendes Resultat erfordert ein Modell, welches einerseits individuell verschiedene Unternehmenszyklen zuläßt, andererseits einen Mechanismus spezifiziert, der trotz Auslöschungseffekten zu aggregierten Zyklen führt und hierdurch gewisse Perioden und Phasen aus der Vielfalt von Unternehmenszyklen auszeichnet. Der bisherigen Modellierung zufolge ist (unter der Annahme stabiler Nachfrage) jedes Unternehmen allein durch seine Vergangenheit bestimmt und von anderen Einwirkungen unbeeinflußt. Eine erfolgreiche Behandlung des Aggregationsproblems hingegen erfordert eine Modellbildung, die eine Interaktion zwischen verschiedenen Unternehmen vorsieht.

Die Bedeutung des Auslöschungseffekts für das Aggregationsproblems wurde bereits von zahlreichen Autoren erkannt.¹ Bei linearen Modellen mit verschiedenen

¹ Am häufigsten im Kontext von Reinvestitionszyklen ("Echotheorie"):

Dieser Theorie zufolge werden Investitionszyklen dadurch erklärt, daß Perioden überdurchschnittlich hoher Ausrüstungsinvestitionen nach Ablauf der technischen Lebensdauer des Ausrüstungskapitals "Echos" von Ersatzinvestitionen hervorbringen. Diese sehr alte, rein technische (und daher ideologisch wenig belastete) Theorie diente u.a. auch osteuropäischen Autoren als Argumentationsbasis bei der Betrachtung von Investitionszyklen in sozialistischen Wirtschaftssystemen

Disaggregierte Reinterpretation

Eigenwerten ist er jedoch universell; dieser Umstand bildet einen grundsätzlichen Einwand gegen lineare Modelle. Im Zusammenhang mit einem linearen Modell stellt Goodwin¹ fest:

"The point about this linear ... mechanism is that it is ... equilibrium seeking (analogous to maximizing entropy) ... Even though it may contain many constituent cycles, they are minor ripples, out of phase with one another, and rapidly dissipated amongst the sectors. What it does not do is to produce the generalized, alternating motions ... , it is not an oscillator, a generator of cycles: for that we need other, nonlinear relations."

(vgl. Lange (1971), Bajt (1971), Sabov (1983)).

Die Echotheorie ist einsektoral und kann unmittelbar disaggregiert interpretiert werden; hiernach führt die Annahme verschiedener Lebensdauern unter den Ausrüstungsgütern zu Auslöschungseffekten (Matthews (1959), Bober (1968), Lange, Bajt). Die völlig analoge Problematik wird auch im Bereich der Demographie diskutiert (R. Dinkel, private Mitteilung).

1 R.M. Goodwin: Disaggregating Models of Fluctuating Growth (1983b)

3 Variierende Parameter

Der Grundgedanke des nun folgenden Teils der Arbeit besteht in der Einführung nichtkonstanter Parameter (speziell: variabler Akzeleratorkoeffizienten) in die zuvor diskutierten Modelle. Hierdurch ergeben sich interessante Konsequenzen:

Bei konstanten Parametern besitzen die Modelle zyklische Lösungen, wobei die relativen Amplituden und Phasen innerhalb jedes einzelnen Zyklus erklärt werden (Siehe etwa die Phasendiagramme für Ausrüstungs- und Lagerzyklus in Abschnitt 2.1.3). Unerklärt bleiben hierbei die Relationen zwischen verschiedenen Zyklen, die allein durch die Wahl von Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Länge der einzelnen Zyklen ist (in guter Näherung) durch die Wahl der jeweiligen Akzeleratorkoeffizienten gegeben. Disaggregierte Modellformulierungen führen nur unter implausibel restriktiven Annahmen zu Zyklen auf Aggregatenebene (Vgl. Kapitel 2.3).

Folgende Fragen bleiben offen:

1. Wie kann die häufig zu beobachtende 2:1-Relation zwischen den Periodenlängen verschiedener Zyklen (Kap. 1.2, stilisiertes Faktum (4)) verstanden werden?
2. Wodurch ist die hiermit typischerweise verbundene Phasenrelation (Zusammenfallen der Extrema, Kap. 1.2, stilisiertes Faktum (5)) verursacht?
3. Wie können aggregierte Zyklen (Kap. 1.2, stilisiertes Faktum (1)) befriedigend erklärt werden?

Allen Fragen ist gemeinsam, daß sie Zusammenhänge und Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Zyklen betreffen (Fragen 1 und 2: Relationen zwischen aggregierten Zyklen;

Variierende Parameter

Frage 3: Interaktion zwischen Unternehmenszyklen). Sie können unter der Annahme konstanter Parameter nicht beantwortet werden.

Die vorgeschlagene Erweiterung der Modelle besteht in der Einführung variierender Parameter: Es wird angenommen, daß der Wert der Akzeleratorkoeffizienten veränderlich ist, wobei die Veränderungen als explizit zeitabhängig (exogen) oder als abhängig von den Variablen des betrachteten Zyklus (endogen) angesetzt werden. Die Stärke der Veränderungen sei etwa von der Größenordnung $\pm 10\%$.

Diese Einführung variierender Parameter beeinträchtigt weder die oszillatorische Natur der Lösungen noch die Phasenrelationen zwischen verschiedenen Variablen innerhalb jedes einzelnen Zyklus. Hingegen ist die Möglichkeit gegeben, eine wechselseitige Beeinflussung verschiedener Zyklen zu modellieren und hierdurch eine Basis für die Beantwortung der obigen Fragen zu schaffen.

Der nun beginnende dritte Abschnitt dieser Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 3.1 wird das notwendige mathematische Instrumentarium dargestellt; es kann ohne Schaden für das ökonomische Verständnis der nachfolgenden Modelldiskussionen überlesen werden. Kapitel 3.2 behandelt die exogene Parametervariation; hierbei ergeben sich Möglichkeiten zur Beantwortung der obigen Fragen 1 und 2 (2:1-Relation einschließlich Phasenlagen) sowie eine erste (schwächere) Erklärung zu Frage 3 (Aggregation des langen Zyklus bei vorgegebenem kurzen Zyklus). In Kapitel 3.3 wird die endogene Parametervariation eingeführt; hieraus erwächst eine stärkere Antwort auf Frage 3 (endogene Modellierung der Aggregation eines Zyklus). Hierauf wird eine Kombination aus exogenem und endogenem Ansatz untersucht und schließlich das

Mathematische Grundlagen

Zusammenwirken aller Erklärungskomponenten anhand von Simulationen eines disaggregierten Gesamtmodells (Ausrüstungszyklus + Lagerzyklus) illustriert.

3.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden mathematische Grundlagen der Modellerweiterung auf den Fall veränderlicher Parameter dargelegt. Hierdurch wird das Instrumentarium der nachfolgenden Modelldiskussionen bereitgestellt.¹ Kapitel 3.1.1 behandelt analytisch das Phänomen der Parametrischen Resonanz und Kapitel 3.1.2 den Spezialfall der Mathieu-Gleichung. In diesen beiden Kapiteln werden einige grundsätzliche Sachverhalte und Zusammenhänge analytisch dargestellt. Für den Allgemeinfall der Modellgleichungen ist eine analytische Betrachtung jedoch nicht möglich; daher werden sie numerisch untersucht. Die dabei angewendeten Methoden sind in Kapitel 3.1.3 dargelegt.

3.1.1 Parametrische Resonanz

Im einfachsten Fall impliziert der Akzelerator 2. Ordnung Zyklen konstanter Amplitude, sofern der Akzeleratorkoeffizient konstant ist (Vergl. (2.1.1.9), (2.1.1.10)). In diesem Kapitel wird hingegen angenommen, daß der Wert des Akzeleratorkoeffizienten zeitlichen Veränderungen

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Parametern behandeln u.a. Kaplan (1962), Kervorkian/Cole (1968) und Arnold (1980).

unterliegt.¹ Sind diese Parameterveränderungen periodisch, so kann exponentielles Wachstum der Amplituden auftreten; dieser Fall wird als "Parametrische Resonanz" bezeichnet.

Die Ausführungen dieses und des folgenden Kapitels sind nicht an bestimmte Modellspezifikationen (Ausrüstungszyklus vs. Lagerzyklus etc.) gebunden. Die Notation ist dementsprechend allgemein, die abhängige Variable wird mit y bezeichnet und steht für K_e , K_i , etc. Hiermit lautet der homogene Teil einer Akzeleratorgleichung mit zeitabhängigem Koeffizienten $w^2(t)$:

$$D^2y + w^2(t)y = 0 \quad (3.1.1.1)$$

Es wird angenommen, $w^2(t)$ sei eine periodische Funktion der Periode T , d.h. für alle t gelte

$$w^2(t+T) = w^2(t) \quad (3.1.1.2)$$

Aus der Periodizität von $w^2(t)$ folgt, daß für jede Lösung $y(t)$ von (3.1.1.1) auch die um T verschobene Funktion $y(t+T)$ (3.1.1.1) erfüllt. Ferner gilt: Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ Lösungen, so auch alle Linearkombinationen $ay_1(t) + by_2(t)$ sowie die entsprechenden Zeitverschobenen. Als Gleichung zweiter Ordnung besitzt (3.1.1.1) zwei linear unabhängige Lösungen. Diese lassen sich derart wählen, daß eine Zeitverschiebung um T als Multiplikation mit einem konstanten Faktor wirkt:

$$y_1(t+T) = x_1 y_1(t), \quad y_2(t+T) = x_2 y_2(t) \quad (3.1.1.3)$$

Funktionen mit dieser Eigenschaft lassen sich allgemein in der Form

¹ Ausführliche Untersuchungen oszillierender Systeme mit variierenden Parametern bieten u.a. Bogoliubov/Mitropolsky (1961), Minorsky (1962) und Andronov/Vitt/Khakin (1966); die nachfolgende Darstellung folgt Landau/Lifschitz (1979).

Mathematische Grundlagen

$$y_1(t) = x_1^{i/T} P_1(t), \quad y_2(t) = x_2^{i/T} P_2(t) \quad (3.1.1.4)$$

darstellen, wobei $P_1(t)$ und $P_2(t)$ periodische Funktionen der Periode T bezeichnen. Multiplikation der Gleichungen

$$D^2 y_1 + w^2(t) y_1 = 0, \quad D^2 y_2 + w^2(t) y_2 = 0 \quad (3.1.1.5)$$

mit y_2 bzw. y_1 und Subtraktion ergibt

$$D^2 y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot D^2 y_2 = D[Dy_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot Dy_2] = 0 \quad (3.1.1.6)$$

oder

$$Dy_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot Dy_2 = \text{const.} \quad (3.1.1.7)$$

Gleichung (3.1.1.7) gilt insbesondere für t und $t+T$. Nach (3.1.1.4) andererseits ergibt Einsetzen von $t+T$ in (3.1.1.7) den Faktor $x_1 x_2$. Hieraus folgt:

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \quad (3.1.1.8)$$

Anstelle der Funktionen y_1 und y_2 und der Konstanten x_1 und x_2 können auch deren komplex Konjugierte y_1^* , y_2^* , x_1^* und x_2^* gewählt werden, wobei das Konstantenpaar x_1 , x_2 mit dem Konstantenpaar x_1^* , x_2^* identisch ist. Hieraus folgt, daß x_1 und x_2 entweder vom Betrag 1 und zueinander konjugiert komplex oder von 1 betragsverschieden, reell und zueinander reziprok sind.

Im zweiten Fall lassen sich die Lösungen mit den Bezeichnungen $x_1 = x$, $x_2 = 1/x$ in der Form

$$y_1(t) = x^{i/T} P_1(t), \quad y_2(t) = x^{-i/T} P_2(t) \quad (3.1.1.9)$$

darstellen. Eine der Lösungen weist eine exponentiell wachsende Amplitude auf. Da die Existenz derartiger Lösungen durch die Variation des Modellparameters $w^2(t)$ verursacht ist, wird dieses Phänomen mit *Parametrischer Resonanz* bezeichnet. Es bedingt die Instabilität der Gleichgewichtslage ($y=0$): Kleine Störungen genügen, um schnell anwachsende Ausschläge auszulösen.

Die vorstehende Diskussion gilt unabhängig von einer speziellen Wahl der Parametervariation $w^2(t)$. Im nachfolgenden Kapitel wird der Spezialfall einer sinusförmigen Schwankung um einen Mittelwert w_0^2 , d.h. $w^2(t)=w_0^2[1+h\cos(vt)]$ betrachtet (Mathieu-Gleichung).

3.1.2 Mathieu-Gleichung

In diesem Kapitel wird das Phänomen der Parametrischen Resonanz für eine spezielle Wahl von $w^2(t)$ näher untersucht, bei der $w^2(t)$ sich nur wenig von einer Konstanten w_0^2 unterscheidet und die Form einer einfachen periodischen Funktion besitzt. Konkret wird angenommen, daß $w^2(t)$ mit einer Frequenz v sinusförmig um den Wert w_0^2 mit einer relativen Amplitude h ($0 < h < 1$) oszilliert:

$$w^2(t) = w_0^2 [1 + h \cdot \cos(vt)] \quad (3.1.2.1)$$

Gleichung (3.1.2.1) ist in der mathematischen Literatur als *Mathieu-Gleichung* bekannt.¹ Für diese Gleichung ist der Effekt der Parametrischen Resonanz am stärksten, falls die exogene Frequenz in etwa gleich der doppelten Frequenz w_0 ist:

$$v = 2(w_0 + \Delta w), \quad \Delta w \ll w_0 \quad (3.1.2.2)$$

Einsetzen von (3.1.2.1) und (3.1.2.2) in (3.1.1.1) ergibt

$$D^2 y + w_0^2 [1 + h \cdot \cos 2(w_0 + \Delta w)t] y = 0 \quad (3.1.2.3)$$

Die Lösung kann für kleine Werte von h und Δw in guter Näherung als sinusförmige Oszillation mit der Frequenz $w_0 + \Delta w$ und langsam veränderlicher Amplitude beschrieben werden:

$$y(t) = a(t) \cdot \cos(w_0 + \Delta w)t + b(t) \cdot \sin(w_0 + \Delta w)t \quad (3.1.2.4)$$

¹ Systematische Untersuchungen der Mathieu-Gleichung finden sich z.B. in Bogoliubov/Mitropolsky (1961).

Sie enthält auch oszillierende Beiträge der Frequenz $3(w_0 + \Delta w)$, $5(w_0 + \Delta w)$, ..., die jedoch geringfügig sind und für kleine h und Δw vernachlässigt werden können (Eine Analyse unter Berücksichtigung solcher Beiträge bieten Bogoliubov/Mitropolsky (1961)).

Zweimalige Differentiation von (3.1.2.4) ergibt

$$\begin{aligned} D^2 y = & D^2 a \cos(w_0 + \Delta w)t - 2Da(w_0 + \Delta w) \sin(w_0 + \Delta w)t \\ & - a(w_0 + \Delta w)^2 \cos(w_0 + \Delta w)t + D^2 b \sin(w_0 + \Delta w)t \\ & + 2Db(w_0 + \Delta w) \cos(w_0 + \Delta w)t - b(w_0 + \Delta w)^2 \sin(w_0 + \Delta w)t \end{aligned} \quad (3.1.2.5)$$

Setzt man (3.1.2.4) und (3.1.2.5) in (3.1.2.3) ein, verwendet die Identitäten

$$\begin{aligned} \cos 2(w_0 + \Delta w)t \cdot \cos(w_0 + \Delta w)t &= \frac{1}{2} [\cos 3(w_0 + \Delta w)t + \cos(w_0 + \Delta w)t], \\ \cos 2(w_0 + \Delta w)t \cdot \sin(w_0 + \Delta w)t &= \frac{1}{2} [\sin 3(w_0 + \Delta w)t - \sin(w_0 + \Delta w)t], \end{aligned} \quad (3.1.2.6)$$

und vernachlässigt die Beiträge der Frequenz $3(w_0 + \Delta w)$ sowie aufgrund der langsamen Veränderlichkeit der Amplituden $a(t)$ und $b(t)$ die Beiträge mit $D^2 a$ und $D^2 b$, so resultiert:

$$\begin{aligned} - \left[2Da + \left(\frac{hw_0}{2} + 2\Delta w \right) b \right] w_0 \sin(w_0 + \Delta w)t \\ + \left[2Db + \left(\frac{hw_0}{2} - 2\Delta w \right) a \right] w_0 \cos(w_0 + \Delta w)t = 0 \end{aligned} \quad (3.1.2.7)$$

Gleichung (3.1.2.7) ist nur erfüllbar, falls die Koeffizienten vor $\sin(w_0 + \Delta w)t$ und $\cos(w_0 + \Delta w)t$ verschwinden. Hieraus ergibt sich ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für $a(t)$ und $b(t)$:

Mathematische Grundlagen

$$D\alpha + \left(\frac{hw_0}{4} + \Delta w\right)b = 0, \quad (3.1.2.8)$$

$$\left(\frac{hw_0}{4} - \Delta w\right)\alpha + Db = 0$$

In Matrix-Vektor-Form lautet (3.1.2.8):

$$D \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{hw_0}{4} + \Delta w\right) \\ -\left(\frac{hw_0}{4} - \Delta w\right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} \quad (3.1.2.9)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom

$$x^2 - \left(\frac{hw_0}{4}\right)^2 + (\Delta w)^2 \quad (3.1.2.10)$$

besitzt die Wurzeln

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{hw_0}{4}\right)^2 - (\Delta w)^2} \quad (3.1.2.11)$$

Exponentiell wachsende Lösungen, d.h. $a(t)$, $b(t) \sim e^{xt}$, treten für reelle Eigenwerte $x_{1,2}$ auf, d.h. für

$$-\frac{hw_0}{4} < \Delta w < \frac{hw_0}{4} \quad (3.1.2.12)$$

Dieses ist die Bedingung für Parametrische Resonanz. Die Breite des Resonanzbereichs ist offenbar proportional zur Stärke h der Parametervariation.

Dieses Resultat wurde unter approximierenden Annahmen erhalten. Verfeinert man diese um quadratische Beiträge in h , so ergibt sich eine geringfügige Korrektur:

$$-\frac{hw_0}{4} - \frac{h^2w_0}{64} < \Delta w < \frac{hw_0}{4} - \frac{h^2w_0}{64} \quad (3.1.2.13)$$

Parametrische Resonanz findet allgemein dann statt, fall die exogene Frequenz ν in der Nähe von $2w_0/n$ ($n=1,2,3,\dots$) liegt. Die obige Darstellung ordnet sich hierunter mit

$n=1$ ein. Die Breite der Resonanzgebiete sowie die Exponenten des Amplitudenwachstums nehmen mit h^n (d.h. sehr stark) ab, so daß für $n>1$ die Resonanzeffekte aus der Perspektive dieser Arbeit unbedeutend schwach sind.

Auch in schwach gedämpften Systemen kann Parametrische Resonanz auftreten; jedoch führt die Dämpfung zu engeren Resonanzgebieten. Dämpfung führt zur einer Abnahme der Amplitude gemäß e^{-rt} . In Kombination mit Parametrischer Resonanz ergibt sich ein Amplitudenwachstum gemäß $e^{(x-r)t}$, wobei x die (positive) Lösung des Problems ohne Reibung (vgl. oben) bezeichnet. Als Resonanzgebiet ergibt sich:

$$-\sqrt{\left(\frac{hw_0}{4}\right)^2 - r^2} < \Delta\omega < \sqrt{\left(\frac{hw_0}{4}\right)^2 - r^2} \quad (3.1.2.14)$$

Im Unterschied zum Fall ungedämpfter Systeme ist Parametrische Resonanz nicht für beliebig kleine Werte von h möglich, sondern nur oberhalb eines Schwellenwertes, der von der Stärke der Dämpfung abhängig ist. Aus der Bedingung der Nichtnegativität der Diskriminanten in (3.1.2.14) folgt unmittelbar:

$$h > \frac{4r}{w_0} \quad (3.1.2.15)$$

Die Resonanzschwelle in der Nähe der Frequenzen $2w_0/n$ ist proportional zu $r^{1/n}$, nimmt mit wachsenden n also zu.

Die Betrachtungen dieses Kapitels sind auf den Elementarfall des Akzelerators zweiter Ordnung (exogene Parametervariation, ein Sektor) unmittelbar übertragbar und stellen einige grundsätzliche Sachverhalte im Zusammenhang mit Parametrischer Resonanz dar. In Kapitel 3.2 werden diese anhand der Simulation konkreter Beispiele illustriert. Darüber hinausgehende Fragestellungen (genauere Approximation, mehrere

Sektoren, Endogenisierung der Parametervariation etc.) sind infolge ihrer Kompliziertheit kaum oder überhaupt nicht analytisch zu bearbeiten. Daher wurde bei der Untersuchung von Modellgleichungen der Arbeit auch von numerischen Methoden Gebrauch gemacht. Die hierbei zur Anwendung kommenden Verfahren werden im nachfolgenden Kapitel dargestellt.

3.1.3 Numerische Integration der Differentialgleichungen des Modells

Das Konzept der Parametervariation führt im Zusammenhang mit dem Aggregationsproblem zu Gleichungssystemen, die infolge ihrer Kompliziertheit eher numerisch als analytisch untersucht werden können. Die Modelldiskussionen der nachfolgenden Kapitel stützen sich daher größtenteils auf numerische Simulationen. In diesem Kapitel wird das hierbei angewendete numerische Verfahren (klassisches Runge-Kutta-Verfahren) dargestellt. Es ist in der Numerischen Mathematik wohlbekannt;¹ nachfolgend wird nur eine elementare Einführung gegeben.

Das *Anfangswertproblem* bei gewöhnlichen Differentialgleichungen lautet:

$$Dy(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad (3.1.3.1)$$

wobei $f(t, y)$ eine gegebene und $y(t)$ eine gesuchte vektorwertige Funktion und y_0 einen gegebenen Vektor (Anfangswert) bezeichnen. Integration von (3.1.3.1) zwischen 0 und t ergibt

¹ Zur Einführung über Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen siehe z.B. Stoer/Bulirsch (1978) oder Björck/Dahlquist (1979); weiterführend sind u.a. Grigorieff (1977) oder Lapidus/Seinfeld (1971).

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad (3.1.3.2)$$

Bei der numerischen Behandlung wird die Zeit t in kleinen Schritten diskretisiert

$$t_j = j \cdot \Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.3.3)$$

und nur für die Zeitpunkte t_j eine Näherungslösung für y bestimmt. Der Abstand Δt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (*Schrittweite*) ist im Sinne einer genauen Berechnung klein zu wählen und steht in keinem Zusammenhang mit ökonomischen Perioden, die bei Differenzengleichungsmodellen auftreten.

Am einfachsten ist das (auch graphisch leicht durchführbare) *Euler-Polygonzug-Verfahren*:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t \cdot f(t_j, y_j); \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.3.4)$$

Jeder Einzelschritt entspricht hierbei einer Taylor-Approximation 1. Ordnung; das Integral in (3.1.3.2) wird durch den Integranden an der unteren Grenze, multipliziert mit Δt , angenähert. Ein *Einzelschritt-Verfahren* besteht generell in einer Vorschrift der Form (3.1.3.4), worin $f(t_j, y_j)$ durch einen allgemeineren Ausdruck $\underline{f}_j$ ersetzt ist:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t \cdot \underline{f}_j; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.3.5)$$

Als *lokaler Abbruchfehler* E_j des Verfahrens wird der Diskretisierungsfehler der exakten Lösung $y(t)$ bezeichnet:

$$E_j = \frac{1}{\Delta t} [y(t_{j+1}) - y(t_j)] \cdot \underline{f}_j; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.3.6)$$

Für das Euler-Polygonzug-Verfahren ergibt sich aus der Taylor-Formel mit exakter Restglied-Darstellung

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t \cdot Dy(t_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot D^2 y(s), \quad t_j \leq s \leq t_{j+1} \quad (3.1.3.7)$$

der lokale Abbruchfehler als

$$E_1 = \frac{\Delta t}{2} \cdot D^2 y(s) \quad (3.1.3.8)$$

Ein Verfahren heißt *konsistent*, falls im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ der lokale Abbruchfehler verschwindet. In (3.1.3.8) ist der lokale Abbruchfehler linear in Δt ; diese Eigenschaft des Euler-Polygonzugverfahrens wird als *Konsistenzordnung 1* bezeichnet.

In dieser Arbeit wurde überwiegend das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* angewendet. Dieses wertet wie nahezu alle Einzelschrittverfahren die Funktion $f(t, y)$ nicht nur zu den Zeitpunkten t_j , sondern auch zu dazwischenliegenden Zeiten aus:

$$L_1 = \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \quad (3.1.3.9)$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_1, y_1) \\ K_2 &= f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, y_1 + \frac{\Delta t}{2} K_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, y_1 + \frac{\Delta t}{2} K_2\right) \\ K_4 &= f(t_1 + \Delta t, y_1 + \Delta t K_3) \end{aligned} \quad (3.1.3.10)$$

Dieses Verfahren besitzt die Konsistenzordnung 4, d.h. die Schrittweitenabhängigkeit des lokalen Abbruchfehlers kann durch $(\Delta t)^4$ abgeschätzt werden. Wegen dieser Eigenschaft ist das klassische Runge-Kutta-Verfahren dem Euler-Polygonzug-Verfahren vorzuziehen: Eine Halbierung der Schrittweite (Verdopplung des Rechenaufwandes) führt beim Euler-Polygonzug-Verfahren (in etwa) zu einer

Mathematische Grundlagen

Halbierung der lokalen Abbruchfehler, beim Runge-Kutta-Verfahren dagegen (in etwa) zu einer Reduktion auf 1/16.

Die Anwendung eines Verfahrens hoher Konsistenzordnung mit kleinen Schrittweiten führt zwar häufig zu guten Ergebnissen, bietet hierfür jedoch keine Gewähr. Ursache hierfür ist der Umstand, daß die lokalen Abbruchfehler der einzelnen Zeitschritte sich akkumulieren können; bei sehr kleinen Schrittweiten gewinnen überdies Rundungsfehler (bedingt durch die endlichstellige Arithmetik von Rechenanlagen) an Bedeutung.

Es ist daher empfehlenswert, die Resultate mehrerer Verfahren (oder zumindest mehrerer Schrittweiten) zu vergleichen, um sich von der Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu überzeugen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde zu diesem Zweck ein weiteres Verfahren (Gauß-Verfahren) hinzugezogen:

$$\underline{f}_j = \frac{1}{2} [K_1 + K_2] \quad (3.1.3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= f\left(t_j + \alpha_1 \Delta t, y_j + \frac{1}{4} \Delta t K_1 + \beta_1 \Delta t K_2\right) \\ K_2 &= f\left(t_j + \alpha_2 \Delta t, y_j + \beta_2 \Delta t K_1 + \frac{1}{4} \Delta t K_2\right) \end{aligned} \quad (3.1.3.12)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, & \beta_1 &= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12}, \\ \alpha_2 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, & \beta_2 &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{12} \end{aligned} \quad (3.1.3.13)$$

Auch dieses Verfahren besitzt die Konsistenzordnung 4. Es ist *implizit*, d.h. bei der Berechnung eines Zeitschritts muß ein Gleichungssystem gelöst werden.

Mathematische Grundlagen

Vorbereitend für die Simulationsrechnungen dieser Arbeit wurden einige typische Mustergleichungen sowohl mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren als auch mit dem Gauß-Verfahren unter Verwendung verschiedener Schrittweiten Δt bearbeitet. Hierbei ergab sich, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren durchwegs zuverlässige Ergebnisse erbrachte und für die Zwecke der Arbeit ausreichend ist. Typischerweise wurden bei oszillierenden Lösungen der Periode 1-2 Schrittweiten von etwa 0.01 verwendet.

3.2 Exogene Parametervariation

Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit wurden makroökonomische Modelle formuliert und disaggregiert reinterpretiert. Hierbei wurde durchwegs von konstanten Modellparametern ausgegangen. Zu Beginn des dritten Abschnitts wurden die Möglichkeiten und Grenzen dieser Vorgehensweise diskutiert. Besitzt ein Modell mehrere unterschiedliche zyklische Lösungen, so kann innerhalb des Modell nicht auf Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zyklen geschlossen werden, vielmehr ist jeder einzelne Zyklus allein durch seine Anfangsbedingungen determiniert.

Wie in Kapitel 2.3 ausgeführt wurde, ist das Aggregationsproblem unter diesen Bedingungen bei Vorliegen einer Vielzahl von Unternehmenszyklen nur unter implausibel starken Restriktionen lösbar. Soll auf derartige Einschränkungen verzichtet werden, so muß eine Interaktion zwischen verschiedenen Unternehmenszyklen angenommen werden.

Die wechselseitige Beeinflussung zwischen verschiedenen Unternehmen kann auf zweierlei Weise modelliert werden:

- (I) Indirekt durch Einführung eines (homogenen) Nachfragesektors mit Wirkung auf die gewünschten Kapitalniveaus (Vgl. etwa das geschlossene Modell des Ausrüstungszyklus in Kapitel 2.1.1).
- (II) Direkt durch Annahme der Veränderlichkeit von Modellparametern (Akzeleratorkoeffizienten) unter noch zu spezifizierenden Bedingungen.

Die erste Modellierungsweise wird in den nachfolgenden Untersuchungen teilweise vorgenommen; in Hinblick auf das Aggregationsproblem hat sie allerdings den gravierenden Nachteil, daß bei stabiler Nachfrage keine wechselseitige

Exogene Parametervariation

Beeinflussung des Investitionsverhaltens verschiedener Unternehmen erfolgt. Daher ist sie dem stilisierten Faktum "Investitionszyklen auch bei stabiler Nachfrage" nicht angemessen und erscheint infolgedessen bei der Untersuchung des Aggregationsproblems als potentielle Erklärungsgrundlage als zu schwach.

Die zweite Modellierungsweise ist stärker. Es wird angenommen, daß Akzeleratorkoeffizienten nicht konstant sind, sondern Schwankungen unterliegen können. Aus diesem Ansatz erwächst nicht nur eine positive Lösung des Aggregationsproblems, vielmehr können auch Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zyklen (2:1-Relationen, Phasenlagen) abgeleitet werden.

Die Idee variierender Akzeleratorkoeffizienten liegt dem gesamten nun folgenden Teil der Arbeit zugrunde und wird in zwei Stufen diskutiert: In diesem Kapitel wird das Investitionsverhalten von Unternehmen bei (exogen) gegebener periodischer Variation betrachtet. Hieraus ergeben sich Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zyklen sowie eine partielle Lösung des Aggregationsproblems (Erklärung des langen Zyklus bei gegebenem kurzen Zyklus). Im nachfolgenden Kapitel 3.3 wird die Variation der Akzeleratorkoeffizienten endogenisiert und eine geschlossene Modellierung der Aggregation von Zyklen erhalten.

Die Wirkung einer exogenen Parametervariation wird am Beispiel der Ausrüstungsinvestitionen untersucht. Die Investitionsgleichung eines einzelnen Unternehmens lautet nach (2.3.1):

$$D^2 K_{t,n} = w_{t,n}^2 (K_{t,n}^* - K_{t,n}) \quad , \quad w_{t,n}^2 = a_{t,n} \quad (3.2.1)$$

Exogene Parametervariation

wobei n den Index der Einzelunternehmung bezeichnet. Über den Akzeleratorkoeffizienten $w_{e,n}^2$ wird nun angenommen, er schwanke mit einer Frequenz v periodisch um seinen Mittelwert $w_{0,e,n}^2$:

$$w_{e,n}^2 = w_{e,n}^2(t) = w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n} \cos(vt)] \quad (3.2.2)$$

Als Größenordnung der relativen Schwankung $h_{e,n}$ wird etwa 10% angenommen.

Eine derartige Schwankung der Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen wird in Rahmen dieses Kapitels als exogen gegeben betrachtet. Sie kann beispielsweise durch den Einfluß eines aggregierten Lagerzyklus verursacht sein:

In Kapitel 2.2.2 ist gezeigt, daß der Akzeleratorkoeffizient linear vom Kostenparameter des Ausrüstungsfehlbestandes α und reziprok vom Kostenparameter γ der Anpassungen der Investitionen abhängig ist (Gleichung (2.2.2.5)). Besitzt ein Unternehmen zuwenig Ausrüstungskapital und steigert seine Investitionen, so sind die Anpassungskosten größtenteils durch Lieferbeschränkungen gegeben und bei allgemein hohen Lagerbeständen tendentiell niedriger (γ kleiner) als bei allgemein geringen Lagerbeständen (γ größer). Besitzt andererseits ein Unternehmen zuviel Ausrüstungskapital, so sind die Kosten des überschüssigen Kapitals bei allgemein hohen Lagerbeständen höher (α größer) als bei niederen Lagerbeständen (α kleiner), denn die Möglichkeit, das Überschußkapital in der Produktion einzusetzen, ist von Höhe der Lagerbestände beeinflußt (Absatzmöglichkeiten der zusätzlichen Produktion).

Diesen Überlegungen zufolge erscheint die Vorstellung als plausibel, der Akzeleratorkoeffizient schwanke in Abhängigkeit von der Höhe der aggregierten Lagerbestände.

Exogene Parametervariation

Darüber hinaus sind auch andere Ursachen für periodische Schwankungen der Akzeleratorkoeffizienten denkbar, so etwa makroökonomische Zyklen anderer Länder.

Im folgenden wird (3.2.2) als gegeben betrachtet und der homogene Teil von (3.2.1) untersucht. Für diesen ergibt sich:

$$D^2 K_{e,n} + w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n} \cos(vt)] K_{e,n} = 0 \quad (3.2.3)$$

Gleichung (3.2.3) wird in der mathematischen Literatur als *Mathieu-Gleichung* bezeichnet. Ihre analytische Behandlung ist kompliziert und ansatzweise in Kapitel 3.1.2 dargestellt. In diesem Kapitel wird nur auf qualitative Eigenschaften der Lösung Bezug genommen.

Im Fall konstanter Akzeleratorkoeffizienten ($h_{e,n}=0$) besitzt (3.2.3) als Lösungen Sinus-Funktionen konstanter Amplitude und der Frequenz $w_{0,e,n}$. Diese Eigenschaften der Lösungen bleiben bei variierenden Koeffizienten ($h_{e,n}>0$) approximativ erhalten. Ein Sonderfall tritt jedoch ein, falls die Frequenzen v und $w_{0,e,n}$ ungefähr eine der folgenden Relationen erfüllen:

$$\frac{2w_{0,e,n}}{v} \cong N, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.4)$$

In einem solchen Fall sind die Lösungen nicht länger beschränkt, vielmehr treten exponentiell wachsende Amplituden auf. Dieser Effekt wird als *Parametrische Resonanz* und (3.2.4) als *Resonanzbedingung* bezeichnet. Die Stärke des Wachstumseffekts nimmt mit zunehmenden N schnell ab; im Rahmen dieser Arbeit ist nur der Fall $N=1$ von Interesse.

Dieser Fall wird im Detail betrachtet: Die Resonanzbedingung für $N=1$ lautet

Exogene Parametervariation

(3.2.5)

$$w_{0,e,n} \cong \frac{v}{2}$$

und der Resonanzeffekt besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) Der Resonanzeffekt nimmt mit der Stärke der Parametervariation, d.h. der Größe von $h_{e,n}$ zu.
- (2) Der Resonanzeffekt ist umso schwächer, je mehr $w_{0,e,n}$ von $v/2$ abweicht. Überschreitet diese Abweichung einen gewissen von $h_{e,n}$ abhängigen Wert, so tritt keine Resonanz auf.
- (3) Die resonant anwachsende oszillierende Lösung steht in einer festen Phasenrelation zur exogenen Parametervariation: Nullstellen/Extrema von $DK_{e,n}$ fallen mit Nullstellen positiver/negativer Steigung der Parametervariation $\cos(vt)$ zusammen.

Diese Eigenschaften sind in den folgenden Abbildungen illustriert.

In allen Fällen sind Investitionen gegen Zeit (in Einheiten einer Periode) aufgetragen. Lösungen für variierende und konstante Parameter sind im Vergleich dargestellt (durchgezogene Linien vs. konstante Linien). Die Parametervariation $h_{e,n}\cos(vt)$ ist punktiert dargestellt. Sofern nicht jeweils Modifikationen demonstriert werden, beträgt die Stärke der Variation ($h_{e,n}$) 10%, ist die Resonanzbedingung $w_{0,e,n}=v/2$ exakt erfüllt und durch die Anfangsbedingungen die resonanzoptimale Phasenlage gewählt.

Eigenschaft (1) ist Abbildung 3.2.1 unmittelbar zu entnehmen.

Eigenschaft (2) ist in den Abbildungen 3.2.2 untersucht:

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION
(FALL : $N = 1$)
UNTERSCHIEDLICHE STAERKE
DER PARAMETERVARIATION

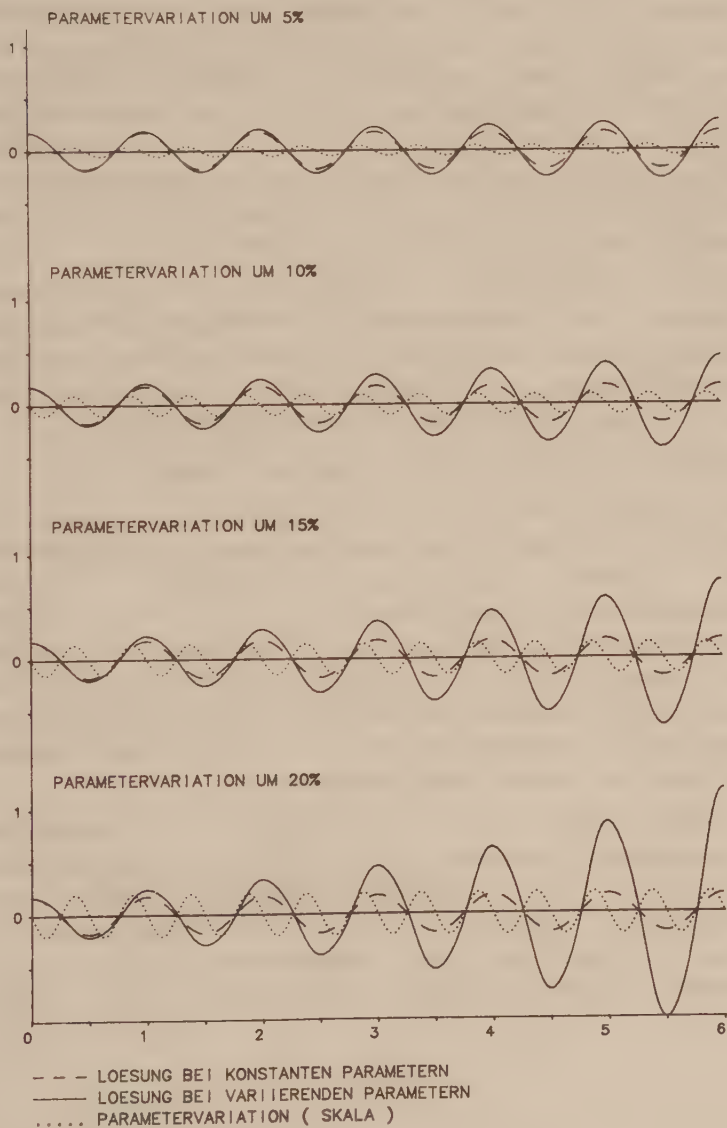


Abbildung 3.2.1

Exogene Parametervariation

In den Abbildungen 3.2.2.a/b sind Abweichungen von der exakten Resonanzbedingung $\omega_{0,e,n} = v/2$ innerhalb der Toleranz für das Auftreten des Resonanzeffekts dargestellt. Dieser ist am stärksten, falls $\omega_{0,e,n} = v/2$ exakt erfüllt ist, und nimmt mit zunehmender Abweichung ab. Wie die Abbildung zeigt, wirkt der Resonanzeffekt nicht nur auf Amplituden, sondern auch auf Frequenzen: Zyklen, die bezogen auf die exakte Resonanzfrequenz $v/2$ zu langsam sind ($\omega_{0,e,n} < v/2$), werden beschleunigt, zu schnelle Zyklen ($\omega_{0,e,n} > v/2$) werden verlangsamt.

In den Abbildungen 3.2.2.c/d werden Abweichungen außerhalb des Resonanzintervalls betrachtet. Wie die Abbildung zeigt, weichen bei starken Abweichungen von der Resonanzbedingung die Lösungen für variierende Parameter kaum von den Lösungen für konstante Parameter ab.

Eigenschaft (3) kann weiter ausgeführt werden:

Die Lösung eines unter Resonanzbedingungen angeregten Systems ist allgemein aus einem exponentiell anwachsenden und einem exponentiell abfallenden Beitrag zusammengesetzt (vgl. Gleichung (3.1.1.9)). Für jeden dieser Beiträge gilt feste eine Phasenrelation relativ zur exogenen Anregung. Ist der anwachsende Beitrag von Null verschieden, so überwiegt er im zeitlichen Verlauf zunehmend, insbesondere wird die Phase der Lösung zunehmend von dessen Phase bestimmt.

In Abbildung 3.2.3 sind Beispiele verschiedener Anfangsphasen dargestellt: Die mit "resonanzgünstige Phasenlage" und "resonanzungünstige Phasenlage" bezeichneten Teilbilder zeigen spezielle Phasenlagen, in denen die Lösung nur einen anwachsenden bzw. abfallenden Beitrag enthält. Startet die Lösung mit einer

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION
(FALL : $N = 1$)
UNTERSCHIEDLICHE ANREGUNGSFREQUENZEN

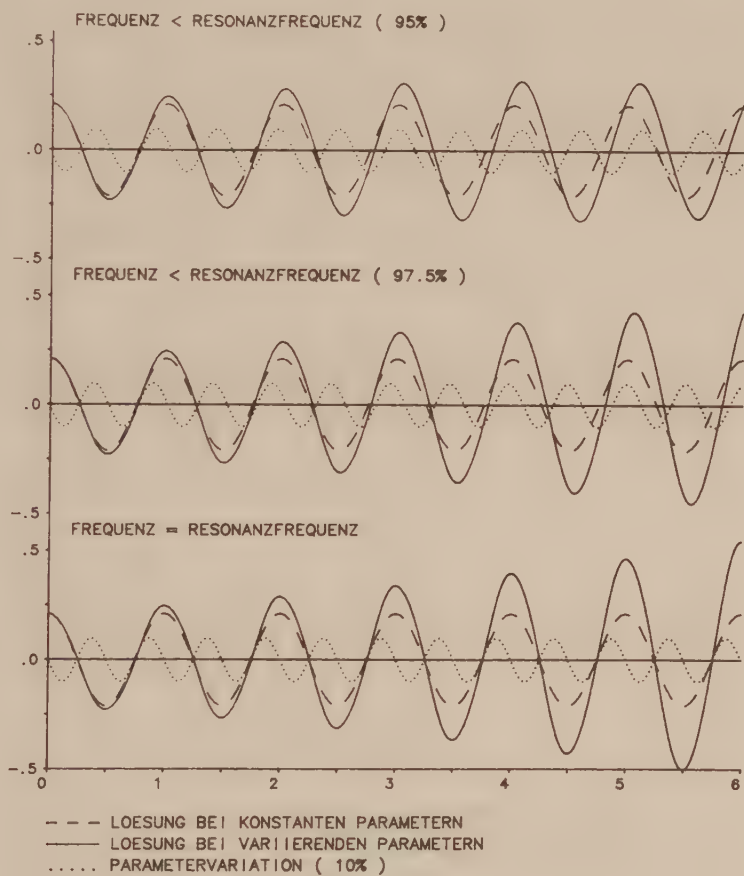


Abbildung 3.2.2.a

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION
(FALL : $N = 1$)
UNTERSCHIEDLICHE ANREGUNGSFREQUENZEN

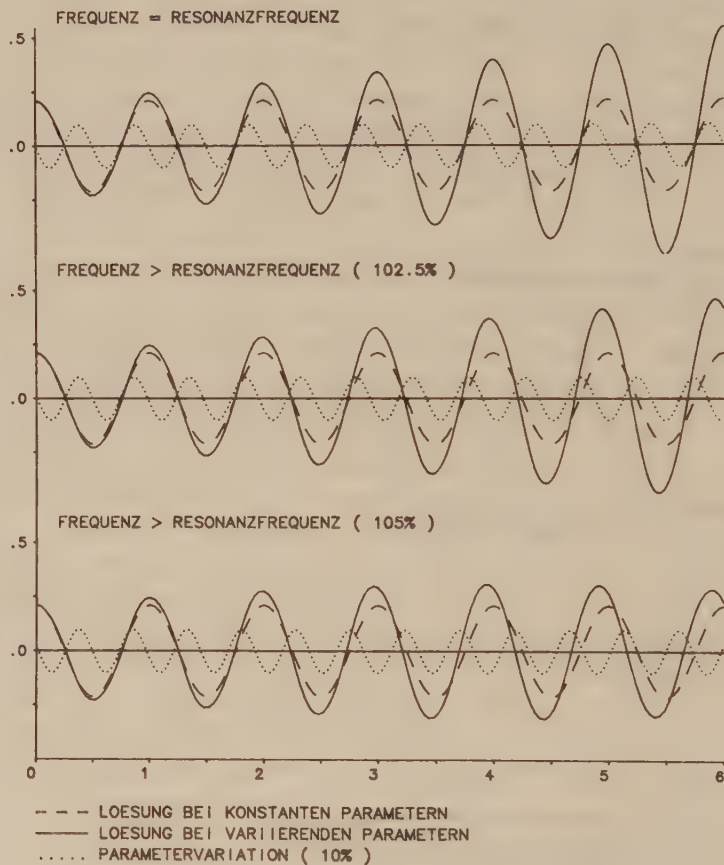


Abbildung 3.2.2.b

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION (FALL : $N = 1$)

UNTERSCHIEDLICHE ANREGUNGSFREQUENZEN

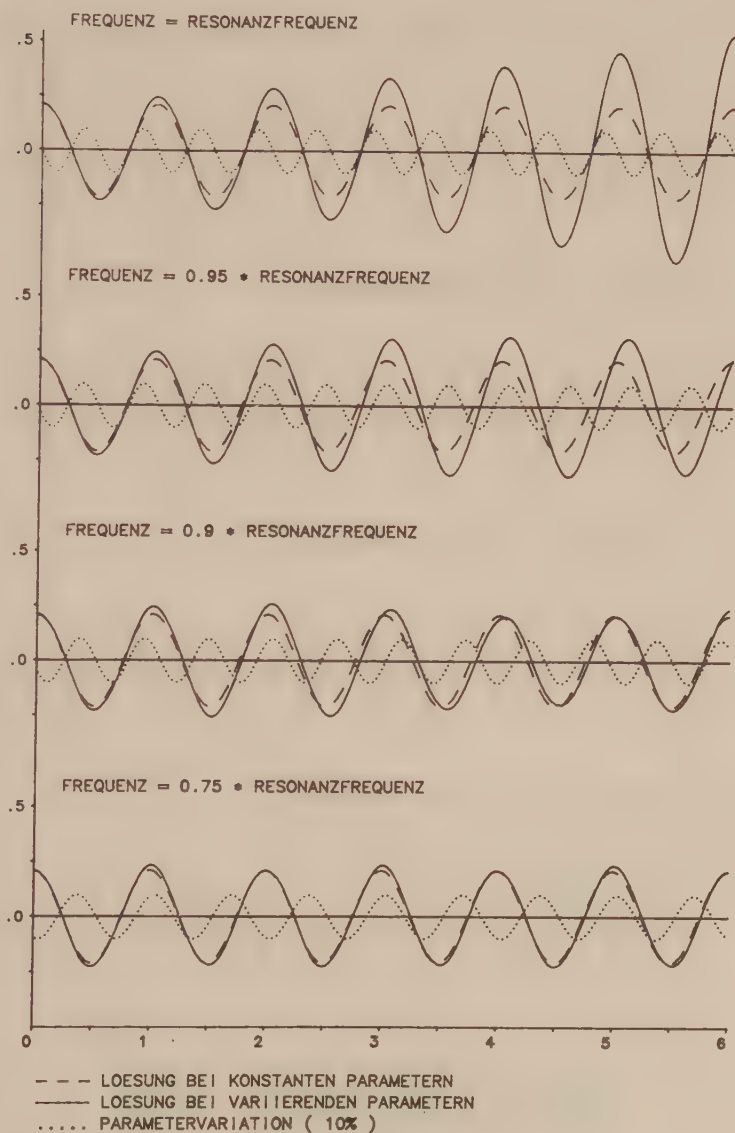


Abbildung 3.2.2.c

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION (FALL : $N = 1$)

UNTERSCHIEDLICHE ANREGUNGSFREQUENZEN

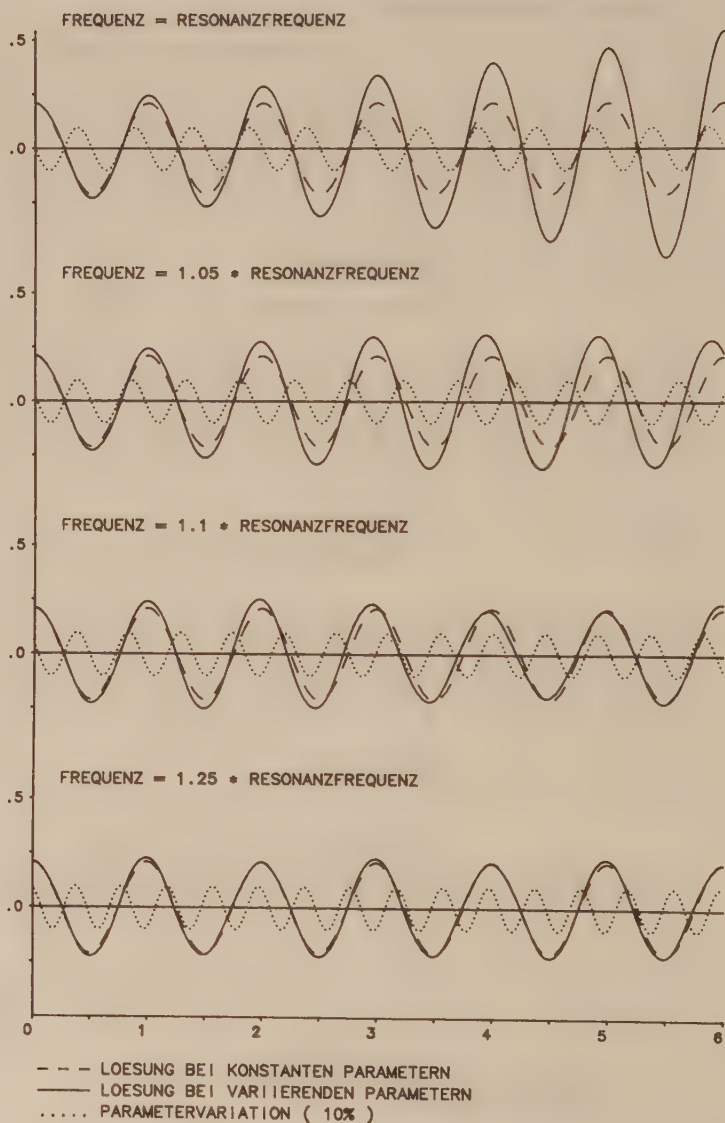


Abbildung 3.2.2.d

ZEITABHAENGIGE PARAMETERVARIATION
(FALL : $N = 1$)
UNTERSCHIEDLICHE PHASENLAGEN

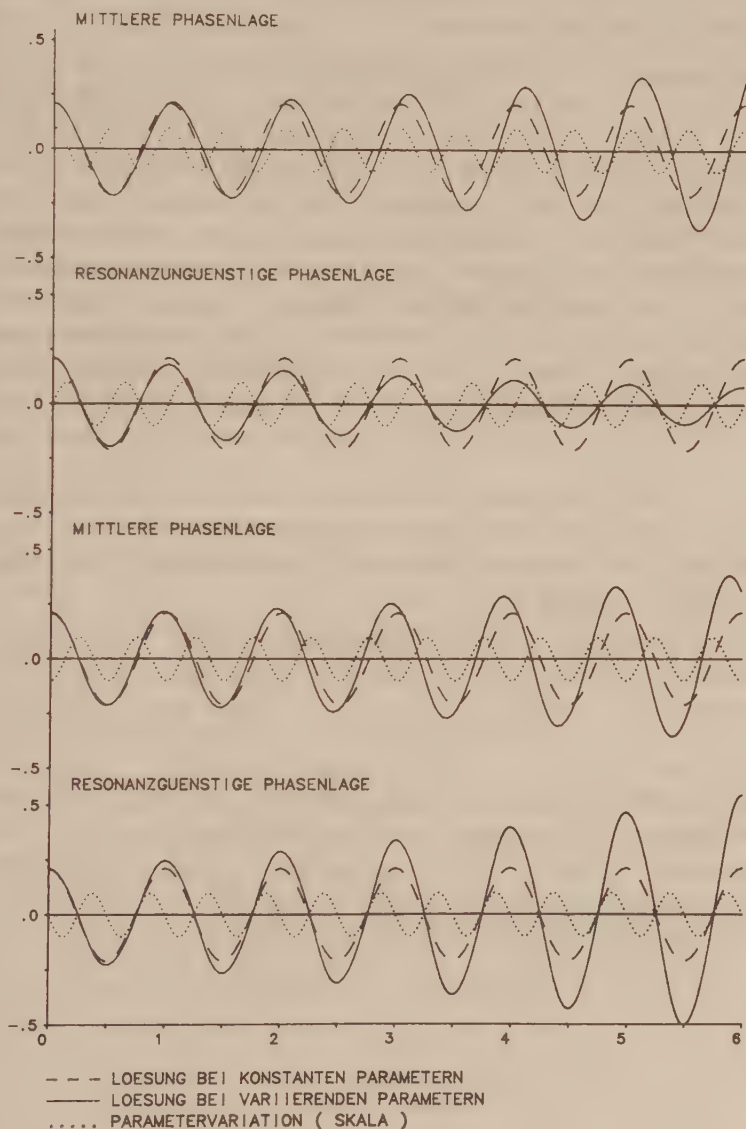


Abbildung 3.2.3

Exogene Parametervariation

allgemeineren Phase (d.h. sind beide Beiträge vorhanden), so nähert sich die Phase der Lösung zunehmend der resonanzgünstigen Phase an.

Resonanzgünstige Phasenlagen sind allein durch die anregende Parametervariation bestimmt und wiederholen sich daher mit deren Periode $(2\pi/\nu)$. Da die Resonanzbedingung eine in etwa doppelte Periode des angeregten Systems impliziert, folgt hieraus, daß für eine resonant angeregte Lösung auch eine hierzu antiphasig verschobene Oszillation resonant angeregt wird. Mit anderen Worten bedeutet dieses, daß der Resonanzeffekt nicht selektiv auf das Vorzeichen der Oszillation wirkt (Diese Eigenschaft kann auch unmittelbar aus Gleichung (3.2.3) ersehen werden).

Die obigen Überlegungen befassen sich mit der Wirkung einer Variation der Akzeleratorkoeffizienten auf die Zyklen von Einzelunternehmen. Nachfolgend wird die **Aggregationsfrage** betrachtet:

Der aggregierte Ausrüstungsbestand ergibt sich durch Summation aller Einzelbeiträge (vergl. Kapitel 2.3):

$$K_s(t) = \sum_{k=1}^{\nu} K_{s,k}(t) \quad (3.2.6)$$

Diese Summe kann zerlegt werden in die Beiträge derjenigen Unternehmen, deren Parameter $w_{0,e,n}$ die Resonanzbedingung (3.2.5) erfüllen, und Beiträge sonstiger Unternehmen. Werden diese mit "m", jene "l" indiziert, so kann (3.2.6) in der Form

$$K_s(t) = \sum_l K_{s,l}(t) + \sum_m K_{s,m}(t) \quad (3.2.7)$$

Exogene Parametervariation

geschrieben werden. Die Zyklen der ersten Teilsumme besitzen alle eine annähernd einheitliche Frequenz ($v/2$), werden resonant angeregt und gelangen hierdurch (bis auf Vorzeichen) in eine einheitliche Phasenlage. Wegen dieser Eigenschaft wird der erste Beitrag in (3.2.7) als "kohärent" bezeichnet.

Die zweite Teilsumme enthält Unternehmenszyklen, die nicht der Resonanzbedingung genügen und auf die daher keine systematische Wirkung ausgeübt wird. Ferner können diesem Beitrag auch alle diejenigen Unternehmen zugeordnet werden, die sich überhaupt nicht gemäß der Modellgleichung (3.2.1) verhalten. Die zweite Teilsumme wird daher als "inkohärenter" Beitrag bezeichnet; von ihr wird angenommen, daß sie infolge wechselseitiger Auslöschungen keinen systematischen Beitrag zum Aggregat leistet.

Diesen Überlegungen zufolge wird die systematische Dynamik des Aggregats allein vom kohärenten Beitrag bestimmt. Folgende Schlußfolgerungen können gezogen werden:

- (i) Im kohärenten Beitrag sind zwei zueinander entgegengesetzte Phasenlagen möglich. Sind diese in gleicher Stärke besetzt, so erfolgt vollständige gegenseitige Auslöschung. Überwiegt jedoch eine der beiden Phasenlagen, so dominiert deren Beitrag und im Aggregat.
- (ii) Führt der kohärente Beitrag zu einem Zyklus im Aggregat, so besitzt dieser entsprechend der Resonanzbedingung die Frequenz $v/2$.

Exogene Parametervariation

- (iii) Zwischen dem anregenden und dem angeregten Zyklus besteht eine feste Phasenrelation (vgl. Eigenschaft (3) oben).

Hierzu werden folgende Anmerkungen getroffen:

- zu (i) Aufgrund der wechselseitigen Auslöschung im Aggregat ist der empirische Nachweis antiphasiger Beiträge in makroökonomischen Daten selten möglich. Als empirisches Musterbeispiel vollständiger Auslöschung können die in Kapitel 1.2, Abbildung 1.2.3 gezeigten Reihen des Vereinigten Königreichs (1870-1913) gelten.

Eine Asymmetrie der beiden Phasenlagen kann zwanglos durch Anfangsbedingungen erklärt werden. Diese Überlegung ist durch die in Kapitel 2.3 erwähnte Beobachtung über einen Zusammenhang zwischen dem Zweiten Weltkrieg und dem Auftreten aggregierter Zyklen in den Reihen verschiedener Länder gestützt.

- zu (ii) Dieses erklärt unmittelbar die beobachteten 2:1-Relationen zwischen den Perioden koexistierender Zyklen.

Für die Diskussion der Ausrüstungsinvestitionen bedeutet dieses: Schwanken die Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen unter dem Einfluß eines gegebenen Lagerzyklus mit vierjähriger Periode, so führt dieses zu einem achtjährigen Ausrüstungszyklus. Auf mikroökonomischer Ebene wird hierbei lediglich angenommen, daß es einige Unternehmen gibt, die sich gemäß (3.2.3) verhalten und die Resonanzbedingung (3.2.5) erfüllen, sowie daß unter ihnen eine inhomogene Verteilung der Anfangsphasen vorliegt.

Exogene Parametervariation

zu (iii) Wird der Einfluß des Lagerzyklus auf die Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen wie oben vorgeschlagen spezifiziert, d.h. schwanken die Koeffizienten parallel zum aggregierten Lagerbestand, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Phasen beider Zyklen: Nullstellen negativer Steigung des Lagerbestandes (Minima der Produktion) fallen mit Extrema der Ausrüstungsinvestitionen zusammen. Dieses entspricht den in Kapitel 1.2 angeführten stilisierten Fakten ("M"-Form).

Eingangs des dritten Abschnitts der Arbeit wurden drei Fragen formuliert, die von den Konjunkturmodellen mit konstanten Parametern des zweiten Abschnitts nicht beantwortet werden können. Diese betrafen (1) die 2:1-Relation zwischen kurzen und langen Zyklen, (2) die Phasenrelationen zwischen kurzen und langen Zyklen und (3) das Aggregationsproblem.

Das in diesem Kapitel vorgeschlagene Konzept der exogenen Parametervariation ermöglicht eine Antwort auf die beiden ersten Fragen sowie eine partielle Beantwortung der dritten Frage (Aggregation eines langen Zyklus bei vorgegebenem kurzen Zyklus). Hiernach kann der Ausrüstungszyklus aus dem Lagerzyklus abgeleitet werden, dessen Erklärung jedoch offen bleibt.

Um zu einer geschlossenen Erklärung des Aggregationsproblems zu gelangen, ist es erforderlich, das Konzept der Parametervariation zu endogenisieren. Dieses ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

3.3 Endogene Parametervariation

In dem nun folgenden Abschnitt wird das Konzept der Parametervariation endogenisiert und erweitert. Die Argumentation ist in drei Stufen gegliedert:

Zuerst (Kapitel 3.3.1) wird am Beispiel des Ausrüstungszyklus ein Ansatz entwickelt, bei dem die Variation der Akzeleratorkoeffizienten der einzelnen Unternehmen durch den Einfluß des Aggregats (endogen) beschrieben wird. Hieraus resultiert eine geschlossene Lösung des Aggregationsproblems für einen einzelnen Zyklus.

In Kapitel 3.3.2 wird der zuvor am Beispiel des Ausrüstungszyklus entwickelte Ansatz endogener Parametervariation auf den Lagerzyklus übertragen.

In Kapitel 3.3.3 schließlich werden das Gesamtmodell von Lager- und Ausrüstungszyklus des Kapitels 2.1.3 disaggregiert formuliert und die verschiedenen Erklärungskomponenten des Konzepts variierender Parameter kombiniert.

3.3.1 Ausrüstungszyklus

In Kapitel 2.3 wurde ausgeführt, daß eine erfolgreiche Behandlung des Aggregationsproblems eine Modellierung der Interaktion verschiedener Unternehmen erfordert. Die im vorigen Kapitel vorgestellte Idee variierender Parameter ist in diesem Sinne unvollständig, da sie als alleinige Ursache einer Parametervariation die Einwirkung eines exogen auf aggregierter Ebene gegebenen Zyklus der halben Periode annimmt. Mit diesem Ansatz kann zwar bei vorausgesetztem Lagerzyklus ein aggregierter Ausrüstungszyklus mit doppelter Periode erklärt werden,

jedoch wird weiterhin angenommen, zwischen den Ausrüstungsinvestitionen verschiedener Unternehmen gebe es keine wechselseitige Beeinflussung.

Die Entwicklung eines Interaktionsmodells ist allein deshalb notwendig, um den vorausgesetzten kürzeren Zyklus (Lagerzyklus) zu erklären. In diesem Kapitel wird auf der Basis endogener Parametervariation ein Interaktionsmodell für den Ausrüstungszyklus entwickelt.¹ Dieser Ansatz wird - mutatis mutandis - in Kapitel 3.3.2 auf den Lagerzyklus übertragen.

Für die Diskussion wird das geschlossene Modell aus Kapitel 2.1.1 betrachtet. Der Investitionssektor wird disaggregiert formuliert, während die Nachfrage unverändert als homogenes Aggregat betrachtet wird.² Der Wachstumsaspekt des Modells bleibt unberücksichtigt, d.h. alle Wachstumsraten sowie die Gleichgewichtssparquote werden Null gesetzt.

1 Hierdurch entsteht ein alternatives Modell zum Aggregationsproblem im Ausrüstungszyklus. In Kapitel 3.3.3 wird gezeigt, daß beide Modelle auf einfache Weise kombiniert werden können.

2 Die Einbeziehung des Nachfragesektors ist für die Investitionsdynamik von untergeordneter Bedeutung, falls die Schwankungen der Nachfrage gering sind. Unter dieser Voraussetzung kann auf die Betrachtung der Nachfrage im Rahmen der folgenden Untersuchungen verzichtet werden, falls das Interesse auf das Aggregationsproblem im Investitionszyklus beschränkt ist.

Werden jedoch kleine Schwankungen der Nachfrage zugelassen, so besteht die Gelegenheit, die Übertragbarkeit der in den Kapiteln 2.1.1-3 für die aggregierten Modelle berechneten Phasenrelationen auf disaggregierte Modelle zu prüfen (und zu bestätigen). Allein zu diesem Zweck wird die Betrachtung des Nachfragesektors mitgeführt.

Endogene Parametervariation

Wie in den Kapiteln 2.3 und 3.2 (Gleichungen (2.3.1) bzw. (3.2.1)) wird angenommen, daß das Investitionsverhalten von Einzelunternehmen durch eine Akzeleratorgleichung der Form beschrieben wird:

$$D^2 K_{e,n} = d_{e,n} (K_{e,n}^* - K_{e,n}) \quad , \quad n = 1, 2, \dots, U \quad (3.3.1.1)$$

Der angestrebte Kapitalbestand $K_{e,n}^*$ der Unternehmung n wird wie im aggregierten Modell (Gleichung (2.1.1.14)) als proportional zur Nachfrage angesetzt:

$$K_{e,n}^* = k_{e,n} Z_e \quad , \quad n = 1, 2, \dots, U \quad (3.3.1.2)$$

Der Nachfragesektor wird unverändert wie in Kapitel 2.1.1 modelliert. Die angestrebte Nachfrage Z_e^* ist (bei verschwindender Gleichgewichtssparquote) gleich der Gesamtproduktion Q :

$$Z_e^* = Q = Z_e + I_e = Z_e + \sum_{n=1}^U I_{e,n} \quad (3.3.1.3)$$

Die Nachfrage selbst unterliegt einer Anpassungsgleichung entsprechend Gleichung (2.1.1.16).

$$DZ_e = d_e (Z_e^* - Z_e) \quad (3.3.1.4)$$

Aufgrund der Stabilität der Nachfrage wird wie im aggregierten Modell (Kapitel 2.1.1) der Parameter d_e als klein angenommen. Im Grenzfall $d_e = 0$ sind die Nachfrage und alle angestrebten Kapitalbestände $K_{e,n}^*$ konstant und somit das System äquivalent zu den Formulierungen in den Kapiteln 2.3 und 3.2. In späteren Simulationsrechnungen wird d_e entweder Null gesetzt oder als genügend klein gewählt, daß die Schwankungen in $K_{e,n}^*$ gegenüber denjenigen in $K_{e,n}$ vernachlässigt werden können (vgl. Anmerkung oben).

Die Leitidee dieses Kapitels besteht darin, daß das Investitionsverhalten einer Unternehmung von den

Endogene Parametervariation

Investitionen aller übrigen Unternehmen beeinflusst wird. Dieser Einfluß wird als Variation des Akzeleratorkoeffizienten modelliert. Hierbei sind der aktuelle Zustand der Unternehmung sowie die Investitionen der übrigen Unternehmen zu betrachten. In möglichst einfacher Formulierung kann der Zustand der Einzelunternehmung durch ihren Kapitalfehlbestand ($K_{e,n}^* - K_{e,n}$) und der Einfluß der übrigen Unternehmen durch die aggregierten Investitionen I_e beschrieben werden:¹

$$a_{e,n} = a_{e,n}((K_{e,n}^* - K_{e,n}), I_e) \quad (3.3.1.5)$$

Über den Einfluß des Aggregats auf die Investitionsentscheidung eines Einzelunternehmens wird folgendes angenommen: Positive/negative aggregierte Investitionen reflektieren allgemein optimistische/pessimistische Gewinnerwartungen.² Diese kehren die Investitionsentscheidung des Einzelunternehmens nicht um, können sie jedoch verstärken (beschleunigen) oder abgeschwächen (verzögern):

1 Diese Formulierung ist in zweierlei Hinsicht vereinfachend:

- (i) Der Einfluß der übrigen Unternehmen wird als homogen angenommen (keine unterschiedlich starke Interaktion zwischen verschiedenen Unternehmen).

Der Beitrag des betrachteten Unternehmens zum

- (ii) Aggregat wird vernachlässigt.

Trotz dieser Einschränkungen ist der Ansatz für die vorliegenden Zwecke ausreichend.

2 Spiethoff (1955) spricht in diesem Zusammenhang von "Gesamtseelenzustand" des Unternehmenssektors und mißt kollektivpsychologischen Mechanismen im Konjunkturverlauf eine überragende Bedeutung bei: "Die letzte Ursache der Aufschwungsbewegungen ist etwas Seelisches und nichts Wirtschaftliches" (S.171).

Endogene Parametervariation

Besitzt ein Unternehmen weniger Ausrüstungskapital als gewünscht und steigert seine Investitionen, so fällt diese Steigerung stärker/schwächer aus, falls allgemein positiv/negativ investiert wird. Besitzt ein Unternehmen hingegen mehr Ausrüstungskapital als gewünscht und reduziert seine Investitionen, so ist die Reduktion bei negativen/positiven Gesamtinvestitionen stärker/schwächer.¹

Eine Übersicht über diese Annahmen zeigt folgende Tabelle:

**Einfluß der Gesamtinvestitionen auf
Akzeleratorkoeffizienten
einer Einzelunternehmung:**

Variation des Akzeleratorkoeffizienten		Aggregierte Investitione n	
		$I_e < 0$	$I_e > 0$
Einzel- unternehmen	$K_{e,n}^* - K_{e,n} < 0$	+	-
	$K_{e,n}^* - K_{e,n} > 0$	-	+

Als einfachste Formulierung dieser Annahmen ergibt sich folgender Ansatz für den Akzeleratorkoeffizienten:

$$a_{e,n}(K_{e,n}^* - K_{e,n}, I_e) = w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n}(K_{e,n}^* - K_{e,n}) \cdot I_e] \quad (3.3.1.6)$$

¹ Vergl. G. Haberler: Prosperity and Depression (1963), S. 145

Endogene Parametervariation

Als Größenordnung der Variation wird wieder ca. 10% angenommen und $h_{e,n}$ entsprechend gewählt. Hiermit folgt aus (3.3.1.1):

$$D^2 K_{e,n} = w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n} (K_{e,n}^* - K_{e,n}) \cdot I_e] (K_{e,n}^* - K_{e,n}) \quad (3.3.1.7)$$

Unter der Annahme eines aggregierten Investitionszyklus der Gestalt $\cos(wt)$ ergibt sich aus (3.3.1.7) für solche Unternehmen, die (bei konstantem $K_{e,n}^*$) dem aggregierten Zyklus exakt folgen und demnach einen mit $\sin(wt)$ variierenden Kapitalbestand besitzen, eine Parametervariation entsprechend $-\cos(wt)\sin(wt) = -\sin(2wt)/2$. Diese Situation besitzt deutliche Parallelen zur Parametrischen Resonanz im Fall exogener Parametervariation (Kap. 3.2) und läßt daher anwachsende Amplituden erwarten.¹

Da im allgemeinen eine analytische Behandlung eines Systems von Gleichungen (3.3.1.7) schwer möglich ist, lassen sich weitergehende Aussagen nur auf der Basis numerischer Simulationen treffen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zahlreiche Untersuchungen durchgeführt;² die nachfolgende Darstellung ist auf die Präsentation einiger Beispiele beschränkt.

Die Ergebnisse der Rechnungen werden graphisch präsentiert. Dargestellt sind jeweils Abweichungen vom Gleichgewicht. In allen Fällen werden die Resultate bei konstanten und variierenden Akzeleratorkoeffizienten miteinander verglichen (gestrichelte bzw. durchgezogene Linien); in der Darstellung von Unternehmenszyklen ist zusätzlich das zugehörige Aggregat für variierende Parameter (punktierte Linien) enthalten.

1 Dieses betrifft sowohl die Frequenz (2:1-Relation) als auch die Phasen (vgl. hierzu Abb. 3.2.3, viertes Teilbild).

2 Die hierbei angewandten numerischen Verfahren sind in Kapitel 3.1.3 beschrieben.

Endogene Parametervariation

Abbildung 3.3.1.1 zeigt ein System von 5 Unternehmungen mit gleichen Eigenfrequenzen w_0, e, n , aber unterschiedlichen Startphasen. Bei konstanten Akzeleratorkoeffizienten beschreiben die Unternehmungen Zyklen konstanter Amplituden und behalten ihre anfängliche Phasenlagen bei. Hierdurch entsteht ein aggregierter Zyklus konstanter Amplitude.

Variieren jedoch die Akzeleratorkoeffizienten gemäß (3.3.1.6), so werden abweichende Phasen der Einzelzyklen derjenigen des Aggregats angenähert (Unternehmen 1,2,4,5; Abb. 3.3.1.1b). Zyklen, die mit dem Aggregat in etwa phasengleich sind, zeigen anwachsende Amplituden entsprechend den obigen Überlegungen. Sowohl infolge der Phasensynchronisation als auch infolge einiger anwachsender Einzelamplituden entsteht ein aggregierter Zyklus mit anwachsender Amplitude.

Das System enthält einen ebenfalls zyklisch variierenden Nachfragesektor. Die Schwankungen der Nachfrage sind gering (Die Teilbilder in den Abbildungen dieses und der folgenden Kapitel sind auf das jeweilige Maximum skaliert) und von verschwindender Wirkung auf den Investitionssektor. Sowohl im Fall konstanter als auch im Fall variierender Akzeleratorkoeffizienten folgt der Nachfragezyklus dem aggregierten Investitionszyklus mit einer Verzögerung von einer Viertelperiode. Dieses entspricht den Befunden aus Kapitel 2.1.1 für das aggregierte Ausrüstungsmodell.¹

In Abbildung 3.3.1.2 wird ein System von 5 Unternehmungen mit gleichen Anfangsphasen, aber unterschiedlichen

¹ Vergl. das Phasendiagramm des Ausrüstungszyklus (Abb. 2.1.1).

DISAGGREGIERTER AUSRUESTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN PHASENLAGEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

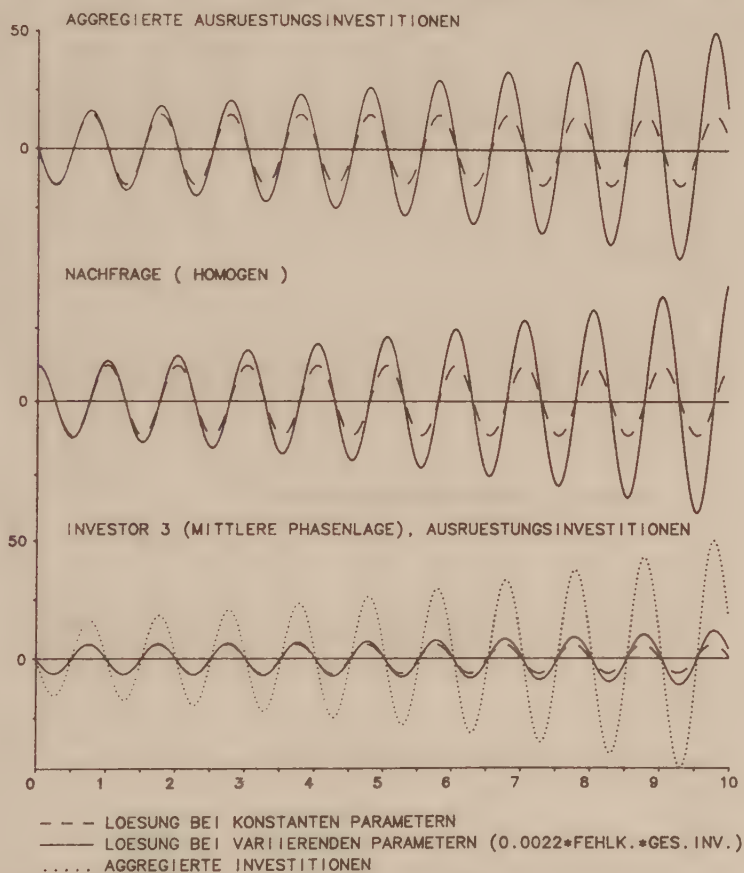


Abbildung 3.3.1.1.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN PHASENLAGEN;
 AKCELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

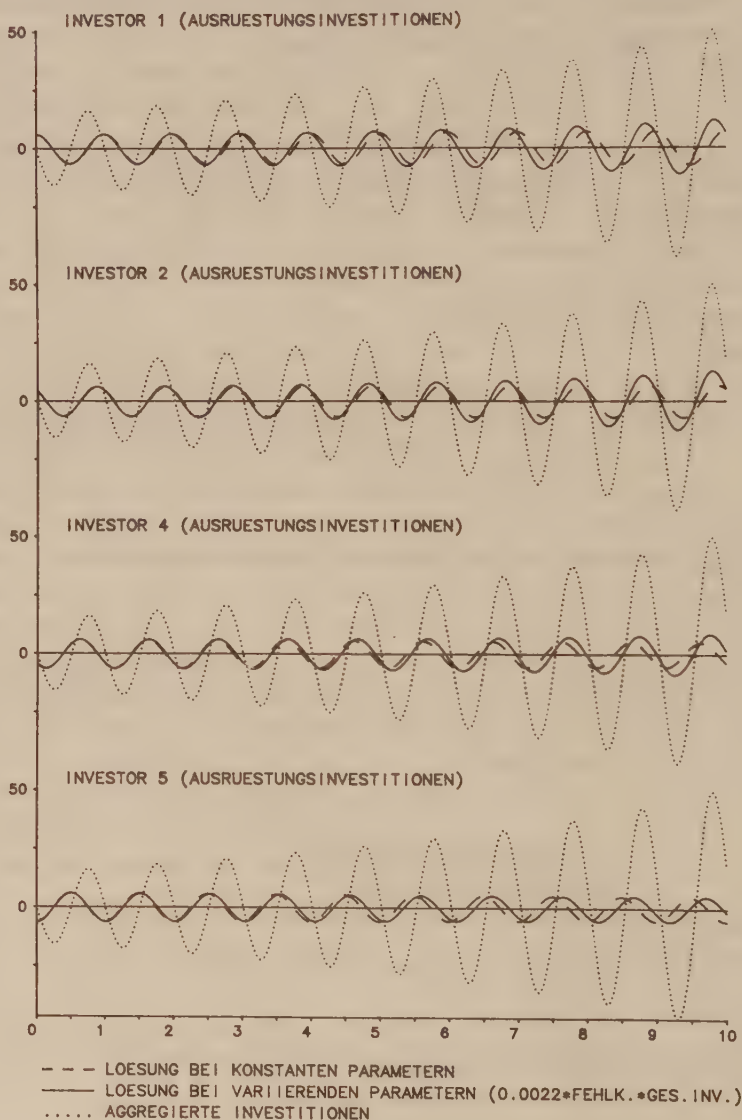


Abbildung 3.3.1.1.b

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

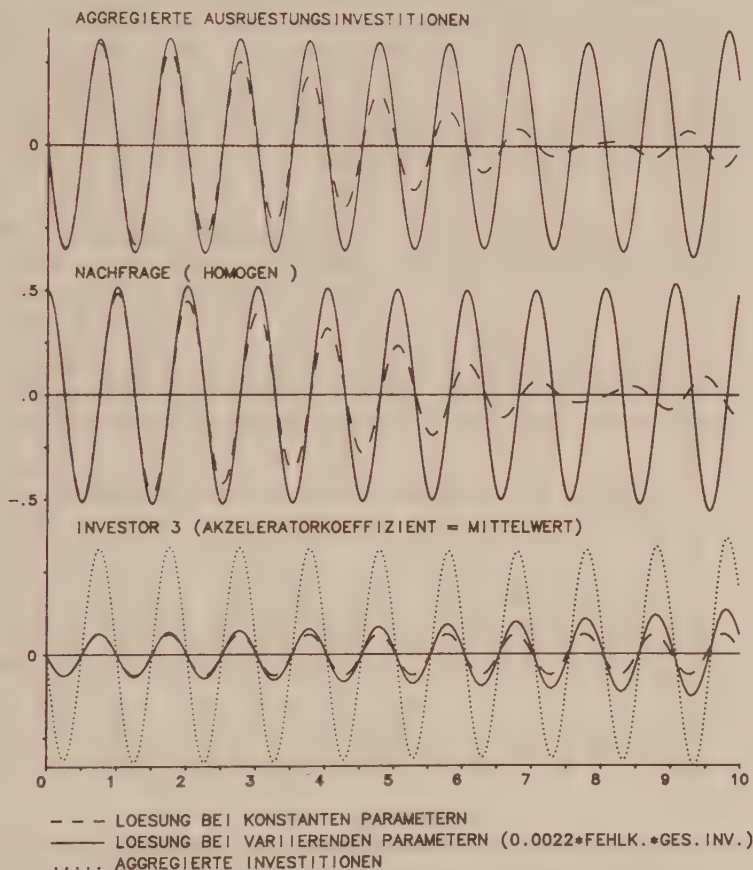
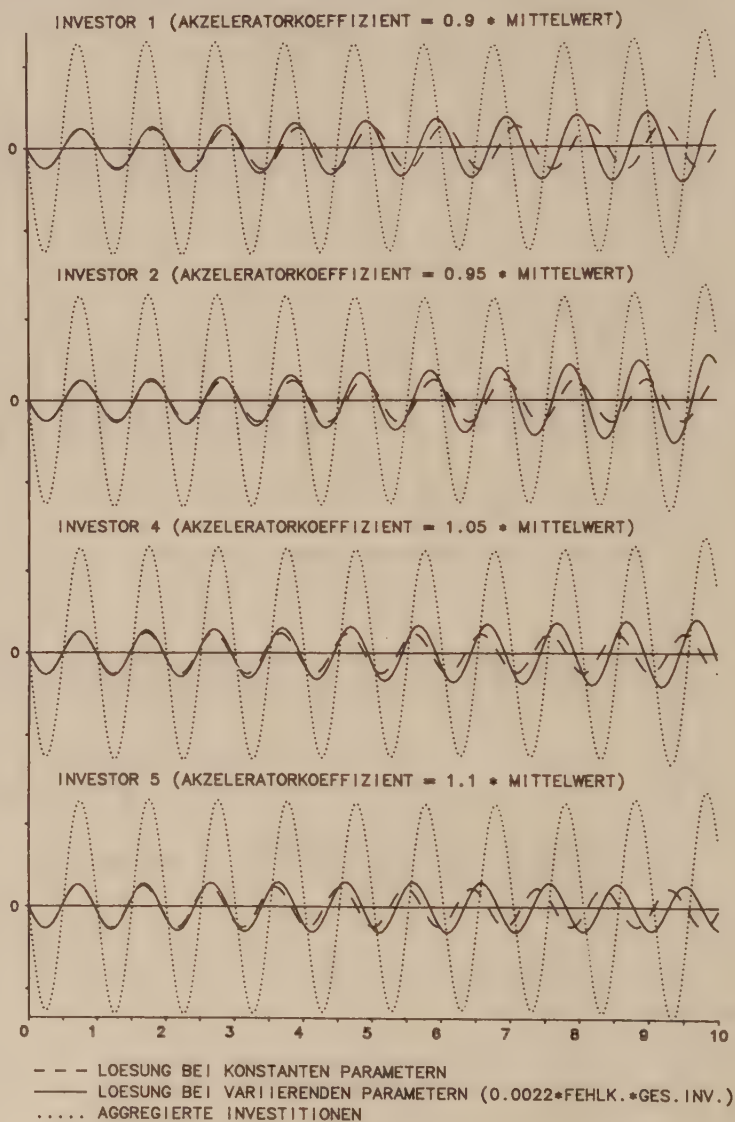


Abbildung 3.3.1.2.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)



Endogene Parametervariation

Eigenfrequenzen $w_{0,e,n}$ untersucht. Die Akzeleratorkoeffizienten weichen von ihrem Mittelwert um 0%, +5% und +10% ab.

Bei konstanten Akzeleratorkoeffizienten geraten die Zyklen außer Phase; dieses führt zu Auslöschungseffekten im Aggregat.¹

Bei variierenden Parametern hingegen werden die relativ langsamen Zyklen (Unternehmen 1 und 2) beschleunigt und die relativ schnellen Zyklen (Unternehmen 4 und 5) verzögert; ferner wachsen die Amplituden einiger Einzelzyklen an. Insgesamt wird das Auftreten von Auslöschungseffekten verhindert.

Die Spezifikation der Variation der Akzeleratorkoeffizienten gemäß (3.3.1.6) weist einen Rückkopplungsmechanismus auf:

Abbildung 3.3.1.3 zeigt eine Variante des zuvor in Abbildung 3.3.1.2 untersuchten Beispiels: Die Stärke der Variation der Akzeleratorkoeffizienten (Parameter $h_{e,n}$) ist geringfügig kleiner. Der Mechanismus ist nun zu schwach, um die Abnahme des aggregierten Zyklus infolge von Auslöschungseffekten zu verhindern. Ist der aggregierte Zyklus einmal im Abnehmen begriffen, so führt dieses auch zu einer Abschwächung der Parametervariation und somit zu einer weiteren Abschwächung des aggregierten Zyklus.

Abbildung 3.3.1.4 zeigt eine gegensinnige Variante dieses Beispiels: Die Stärke der Variation der Akzeleratorkoeffizienten (Parameter $h_{e,n}$) ist nun geringfügig größer. Der Mechanismus ist stark genug, um

¹ Dieses Beispiel wurde (ohne Einbeziehung der Nachfrage) bereits in Kapitel 2.3 betrachtet.

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

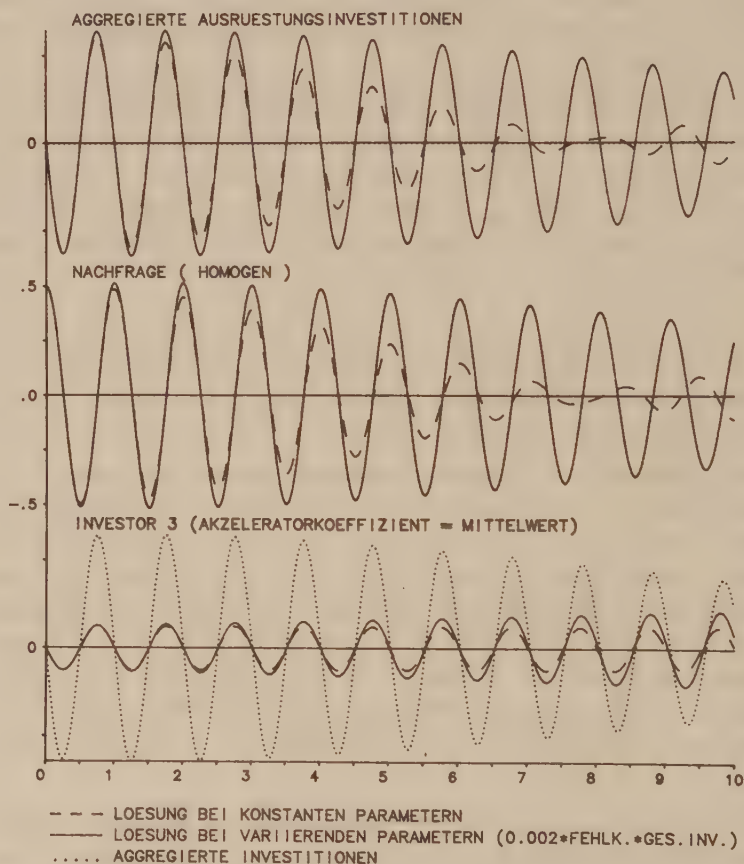


Abbildung 3.3.1.3.a

DISAGGREGIERTER AUSTRÜSTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

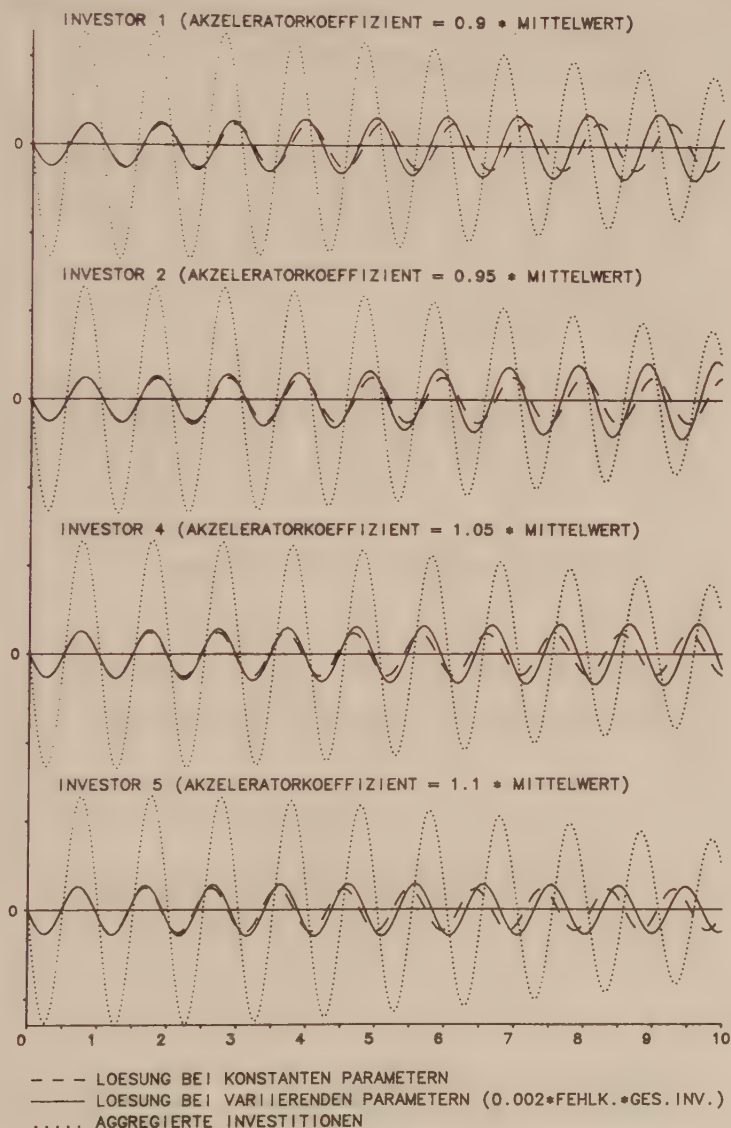


Abbildung 3.3.1.3.b

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

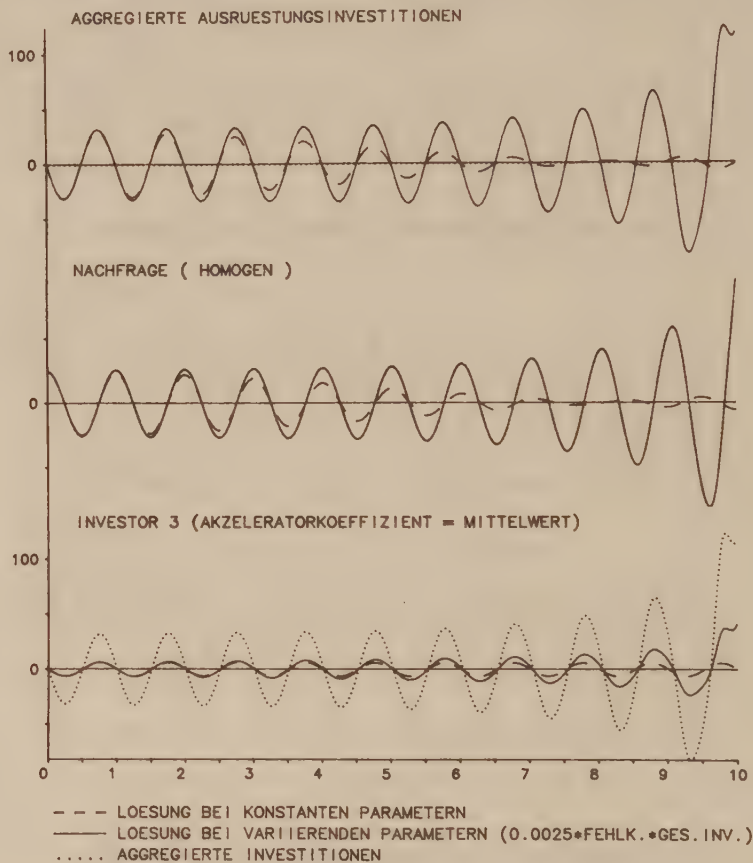


Abbildung 3.3.1.4.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

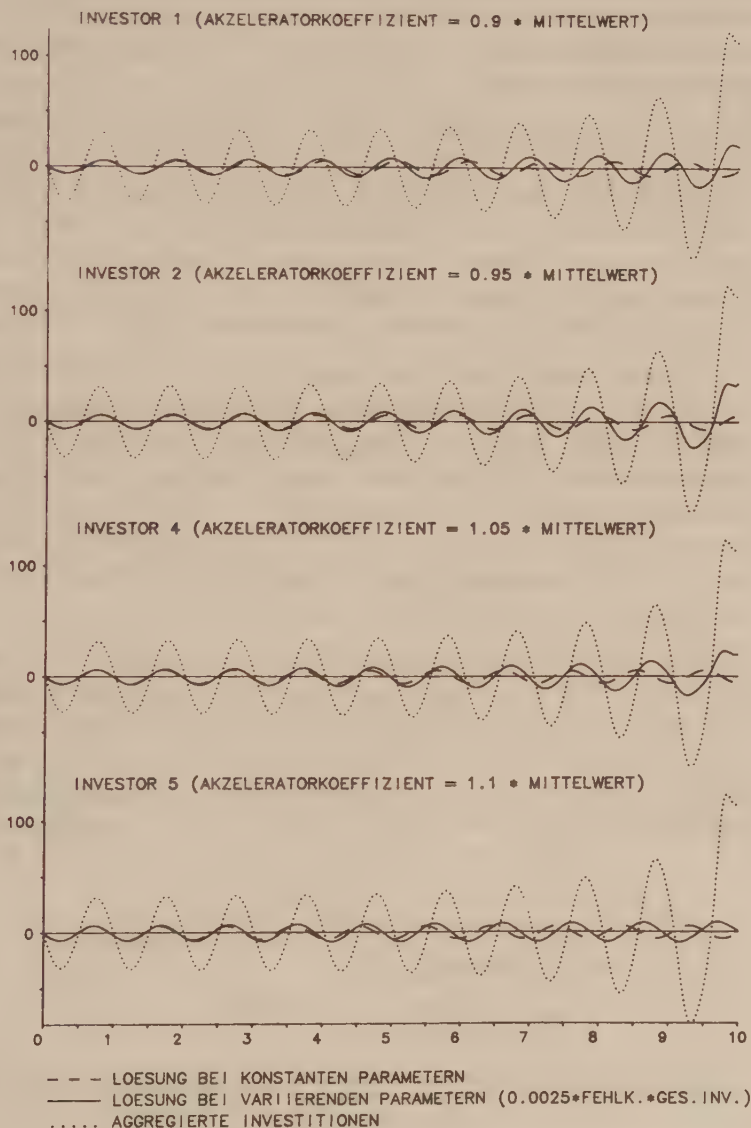


Abbildung 3.3.1.4.b

Endogene Parametervariation

ein merkliches Amplitudenwachstum des aggregierten Zyklus zu verursachen. Ist der aggregierte Zyklus einmal im Zunehmen begriffen, so führt dieses jedoch zu einer weiteren Verstärkung der Ursache seiner Zunahme (Parametervariation).

Dieser Rückkopplungseffekt bedingt die Instabilität des Modells: Übersteigt nämlich die relative Stärke der Parametervariation den Wert 1, so führt dieses zu einer Vorzeichenumkehr der Akzeleratorkoeffizienten und zu explodierenden Lösungen des Systems (Der Beginn eines solchen Effekts ist in Abb. 3.3.1.4 am Ende des betrachteten Zeitintervalls zu beobachten).

Aus diesem Grund wird Gleichung (3.3.1.6) dahingehend modifiziert, daß die Stärke der Parametervariation begrenzt wird. Anstelle einer linearen Abhängigkeit der Akzeleratorkoeffizienten von $(K_{e,n}^* - K_{e,n})I_e$ wird eine S-förmige Funktion mit Asymptoten im Inneren des Intervalls $(-1,1)$, etwa bei ± 0.1 , vorgeschlagen. Eine derartige Modellierung kann beispielsweise mithilfe des hyperbolischen Tangens¹ vorgenommen werden:

$$\omega_{e,n}^2(K_{e,n}^* - K_{e,n}, I_e) = \omega_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n}^{(1)} \tanh(h_{e,n}^{(2)}(K_{e,n}^* - K_{e,n})I_e)] \quad (3.3.1.8)$$

Gleichung (3.3.1.8) zufolge besitzt die Variation der Akzeleratorkoeffizienten für kleinere Werte von $(K_{e,n}^* - K_{e,n})I_e$ die Stärke $h_{e,n}^{(2)}$ und für größere Werte von $(K_{e,n}^* - K_{e,n})I_e$ die asymptotischen Grenzen $\pm h_{e,n}^{(1)}$.

1 Hyperbolischer Tangens:

Definition:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

Eigenschaften $\tanh(0) = 0$, $\tanh'(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$
n:

Endogene Parametervariation

Die Abbildungen 3.3.1.5 und 3.3.1.6 zeigen die Anwendung von (3.3.1.8) anstelle von (3.3.1.6) als Vorschrift der Parametervariation auf das oben betrachtete System von 5 Unternehmungen mit unterschiedlichen Akzeleratorkoeffizienten. Die wesentliche Eigenschaft des Modells (Synchronisationseffekt) bleibt erhalten. Eine gewisse Mindestgröße vorausgesetzt - ist der Parameter $h^{(2)}_{e,n}$ von untergeordneter Bedeutung. Dieses zeigt der Vergleich der Abbildungen 3.3.1.6a-c.

Um die Zahl der Modellparameter gering zu halten, liegt es daher nahe, zum Grenzfall $h^{(2)}_{e,n} \rightarrow \infty$ überzugehen. In diesem Grenzfall gehen der hyperbolische Tangens in die Vorzeichenfunktion¹ über:

$$\omega_{e,n}^2(K_{e,n}^* - K_{e,n} \cdot I_e) = \omega_{e,n}^2 [1 + h_{e,n}^{|||} \text{sign}((K_{e,n}^* - K_{e,n}) \cdot I_e)] \quad (3.3.1.9)$$

Es wird daher vorgeschlagen, bei der Modellierung endogener Parametervariation Gleichung (3.3.1.6) durch Gleichung (3.3.1.9) zu ersetzen. Die Wirkungsweise von (3.3.1.9) wird anhand der obigen Beispiele von 5 Unternehmungen untersucht. Die Abbildungen 3.3.1.7 und 3.3.1.8 zeigen den Fall unterschiedlicher Startphasen bei gleichen Akzeleratorkoeffizienten resp. den Fall gleicher Startphasen, aber unterschiedlicher Akzeleratorkoeffizienten.² Die Wirkung der Variation der Akzeleratorkoeffizienten in Bezug auf die Synchronisation von Frequenzen und Phasen ist im Vergleich zu den Abbildungen 3.3.1.1 und 3.3.1.2 qualitativ unverändert und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung.

1 Vorzeichenfunktion:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

2 Abbildung 3.3.1.7 kann als Fortsetzung der Abbildungsserie 3.3.1.5 und 3.3.1.6a-c betrachtet werden.

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

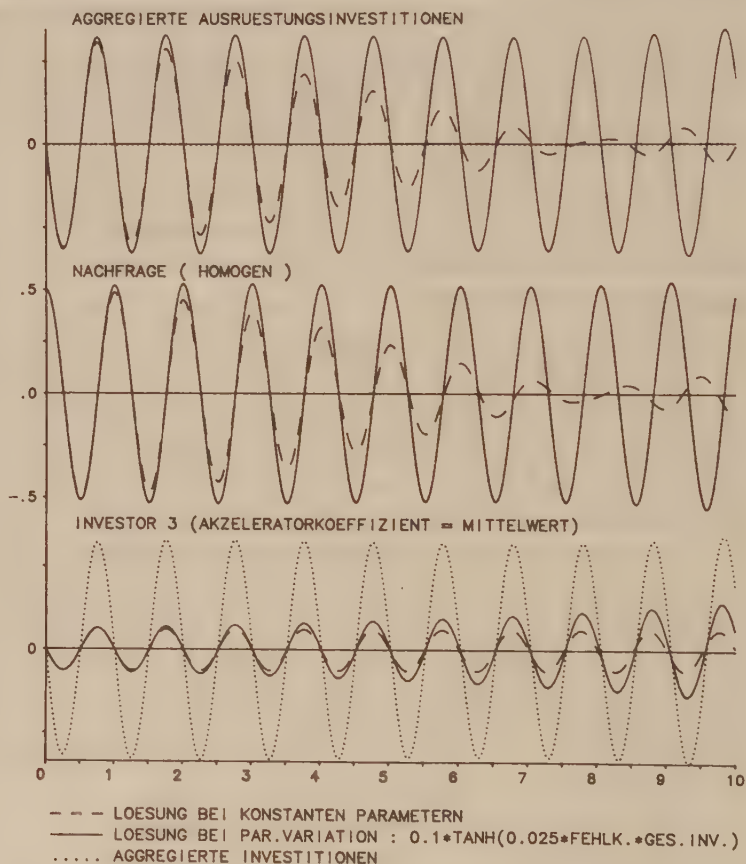


Abbildung 3.3.1.5.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS:

5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

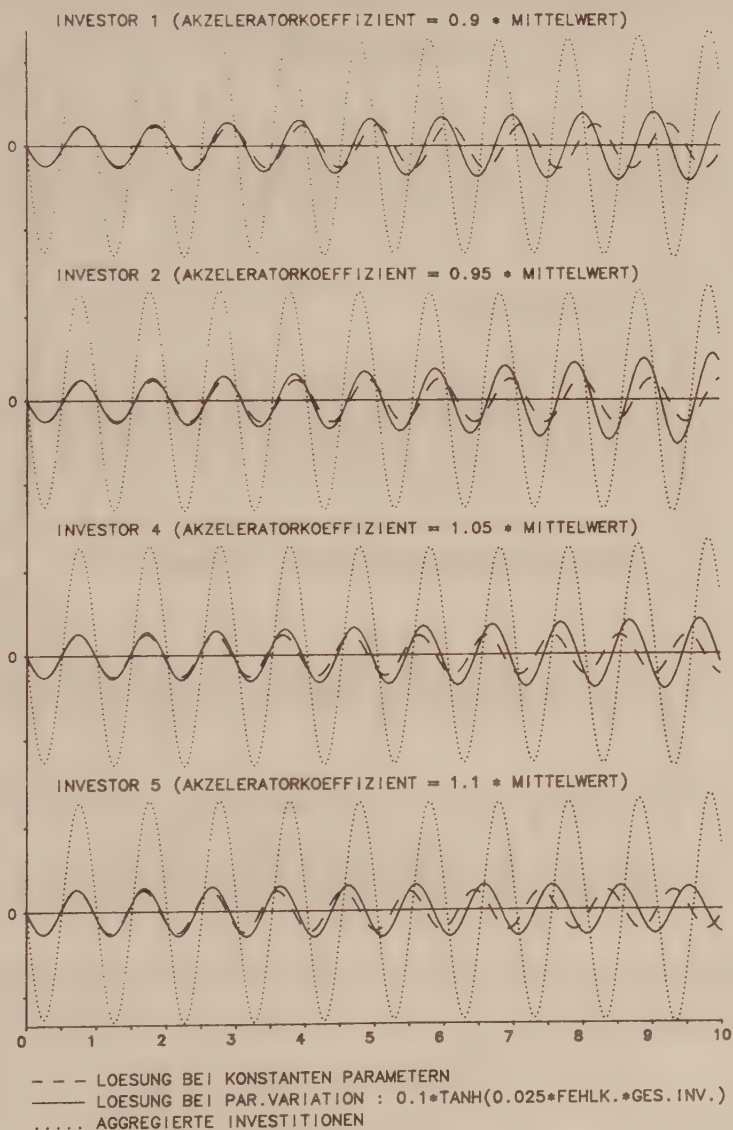


Abbildung 3.3.1.5.b

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

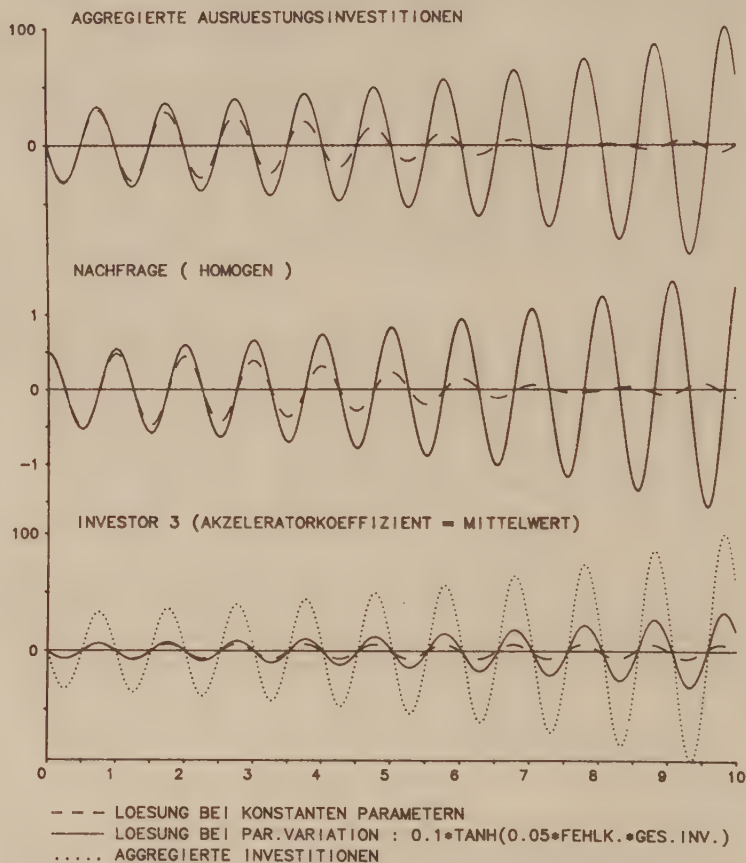


Abbildung 3.3.1.6.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

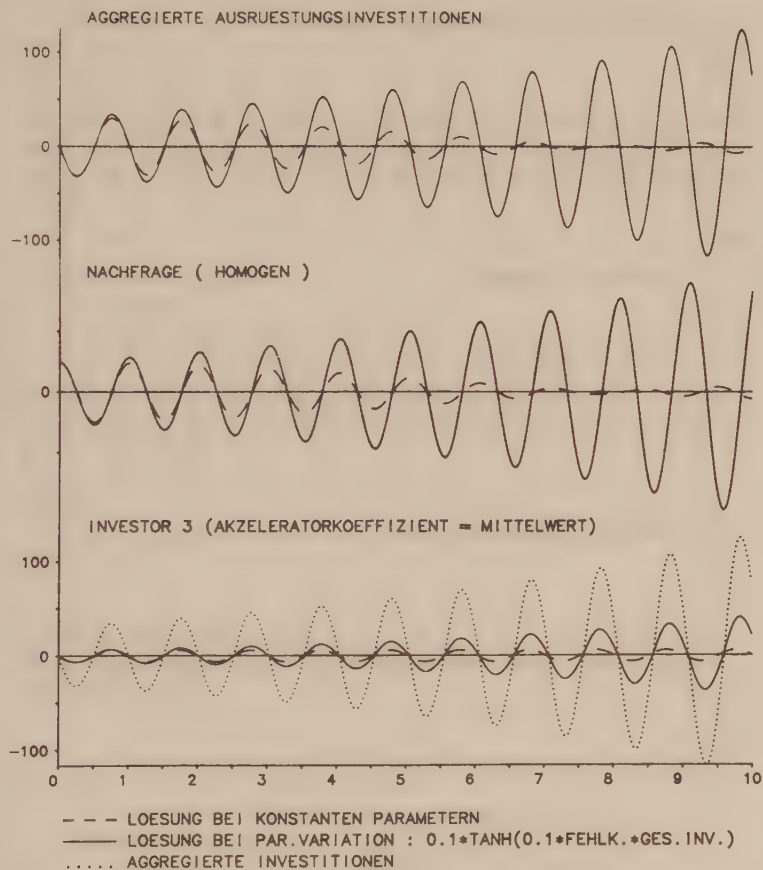


Abbildung 3.3.1.6.b

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

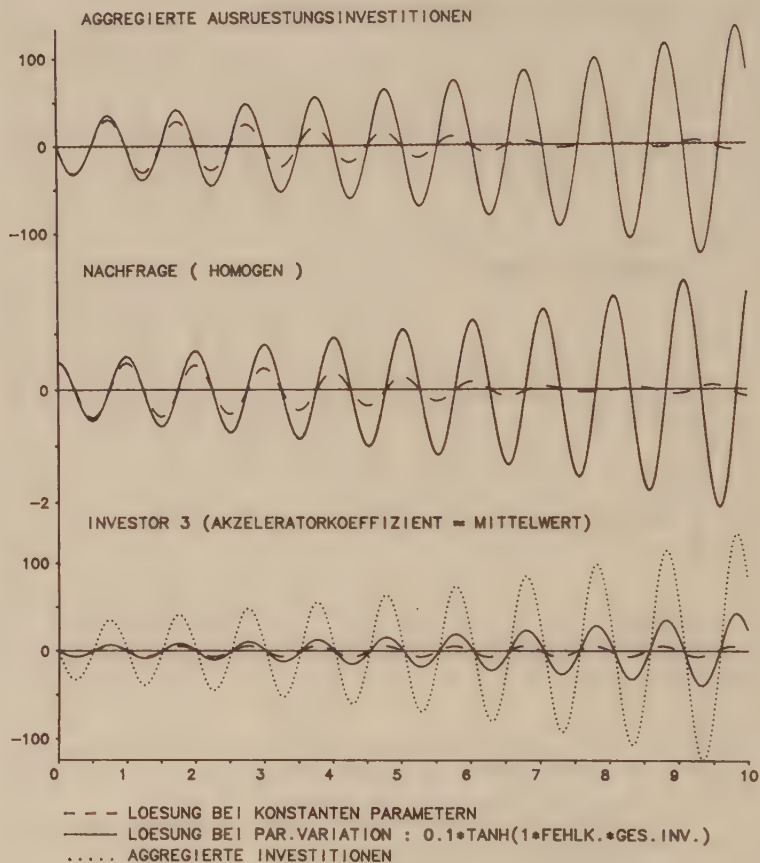


Abbildung 3.3.1.6.c

DISAGGREGIERTER AUSRUESTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN PHASENLAGEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL*GES. INVESTITION)

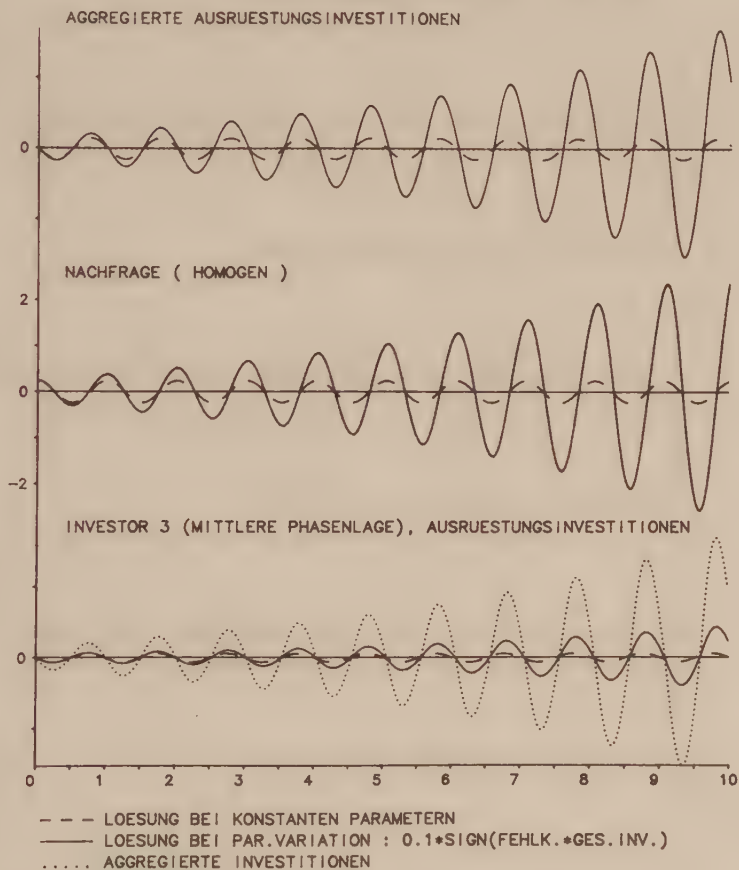


Abbildung 3.3.1.7.a

DISAGGREGIERTER AUSRUESTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN PHASENLAGEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

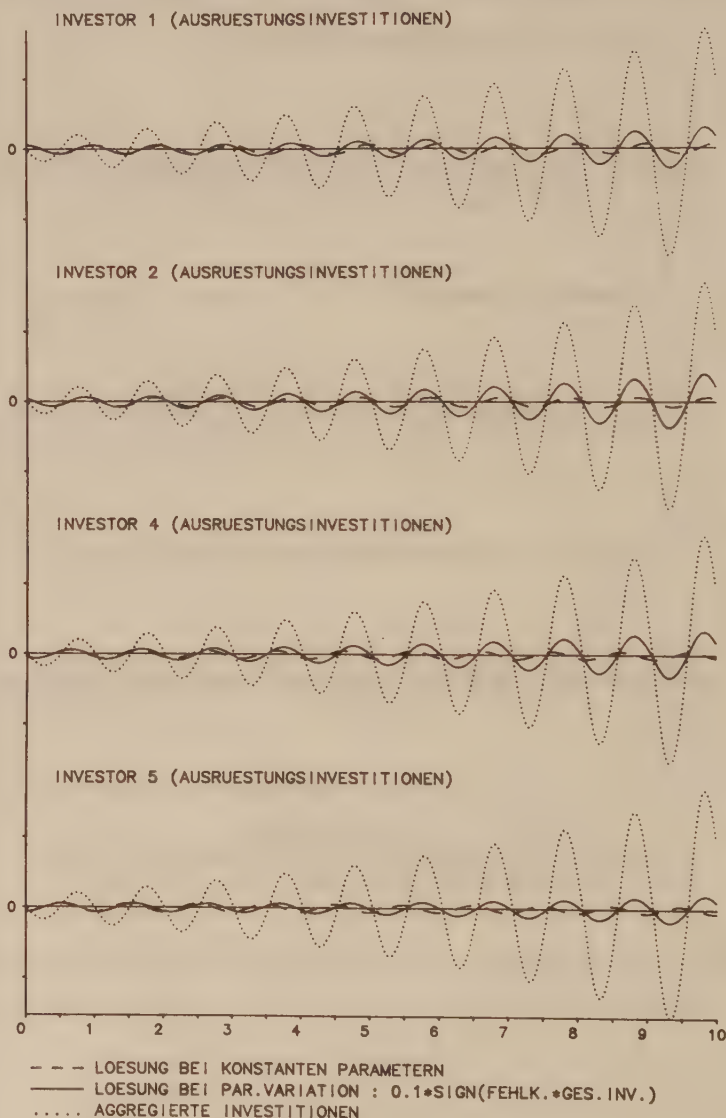


Abbildung 3.3.1.7.b

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

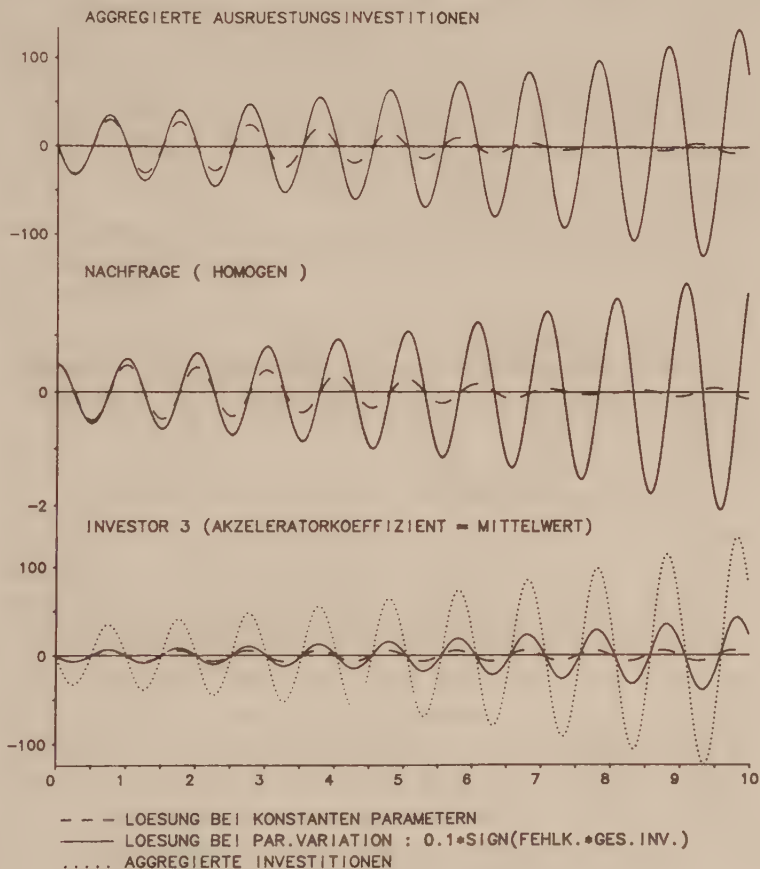


Abbildung 3.3.1.8.a

DISAGGREGIERTER AUSRÜSTUNGSZYKLUS:
 5 INVESTOREN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLKAPITAL * GES. INVESTITION)

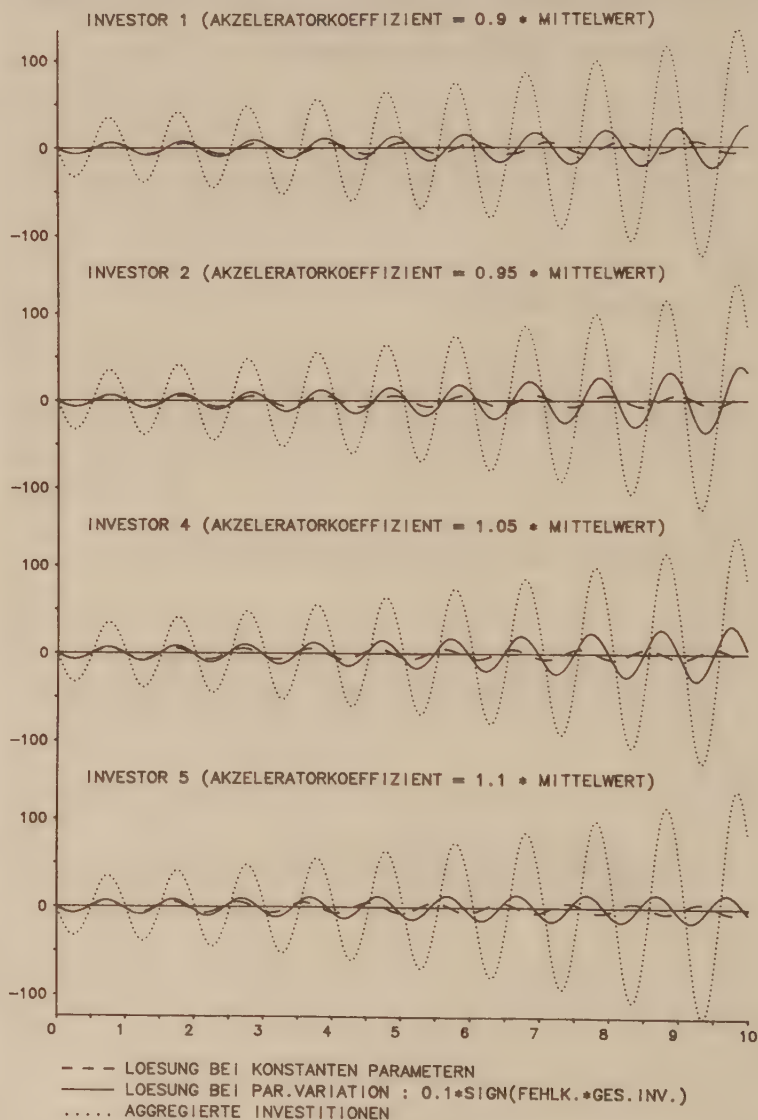


Abbildung 3.3.1.8.b

Endogene Parametervariation

Aus diesen Ausführungen ergibt sich, daß das vorgeschlagene Konzept der endogenen Parametervariation robust gegenüber unterschiedlichen Spezifikationen ist und demnach eine stabile Grundlage für die endogene Behandlung des Aggregationsproblems bietet. Um dieses weiter auszuführen, wird wie in Kapitel 3.2 (Gleichung (3.2.7) und Text) argumentiert:

Die Gesamtheit aller Unternehmen im Aggregat wird in einen kohärenten und einen inkohärenten Teil zerlegt, wobei vom inkohärenten Anteil angenommen wird, er leiste infolge innerer Auslöschung keinen signifikanten Beitrag zum Aggregat.

Vom kohärenten Anteil wird angenommen, daß die zugehörigen Unternehmen sich gemäß den obigen Modellgleichungen verhalten, Eigenfrequenzen besitzen, welche in etwa der Frequenz des aggregierten Zyklus entsprechen, und dem Einfluß des Aggregats insoweit unterliegen, daß sie durch die hierdurch verursachte Variation ihrer Akzeleratorkoeffizienten bezüglich Frequenz und Phase synchronisiert werden (wie in den Beispielen der Abbildungen 3.3.1.7 und 3.3.1.8). Hierdurch wird der Beitrag dieser Unternehmen verstärkt.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Dynamik des Aggregats und somit auch dessen Einfluß auf die Akzeleratorkoeffizienten der Einzelunternehmen allein vom kohärenten Anteil bestimmt. Innerhalb dessen jedoch werden die Frequenzen und Phasen der Einzelzyklen durch den vorgeschlagenen Mechanismus variierender Parameter synchronisiert.

Daher bietet das Modell die Möglichkeit einer endogenen Erklärung aggregierter Ausrüstungszyklen.

3.3.2 Lagerzyklus

Das im vorigen Kapitel entwickelte Interaktionsmodell auf der Basis variierender Parameter wird nachfolgend auf den Lagerzyklus übertragen.

Mit den Bezeichnungen des zweiten Abschnitts lautet die Akzeleratorgleichung für die Produktion eines einzelnen Unternehmens gemäß (2.3.3):

$$DQ_n = a_{i,n}(K_{i,n}^* - K_{i,n}) \quad , \quad n = 1, 2, \dots, U \quad (3.3.2.1)$$

Entsprechend dem aggregierten Modell des Kapitels 2.1.2 wird eine Modellschließung durch Einführung eines Nachfragesektors vorgenommen. Der angestrebte Lagerbestand $K_{i,n}^*$ der Unternehmung wird als proportional zur Gesamtnachfrage Z_i angenommen:

$$K_{i,n}^* = k_{i,n} Z_i \quad , \quad n = 1, 2, \dots, U \quad (3.3.2.2)$$

Wie zuvor im disaggregierten Ausrüstungsmodell wird der Nachfragesektor als homogen betrachtet. Ebenso wird wie dort vereinfachend der Fall verschwindenden Wachstums angenommen. Hiernach ist die Gleichgewichtsspartrate 0, d.h. das angestrebte Nachfrageniveau Z_i^* gleich der Gesamtproduktion Q :

$$Z_i^* = Q = \sum_{n=1}^U Q_n \quad (3.3.2.3)$$

Entsprechend dem aggregierten Modell (Gleichung (2.1.2.12)) unterliegt die Nachfrage Z_i einer Anpassungsgleichung der Form:

$$DZ_i = d_i(Z_i^* - Z_i) \quad (3.3.2.4)$$

Stabilität der Nachfrage impliziert kleine Werte für d_i ; im Grenzfall $d_i=0$ sind die Nachfrage und die angestrebten Lagerbestände aller Unternehmen konstant.¹

¹ Vergl. die entsprechende Diskussion in Kapitel 2.1.2.

Endogene Parametervariation

In Analogie zum vorigen Kapitel wird angenommen, die Akzeleratorkoeffizienten der Produktion der einzelnen Unternehmungen variieren unter dem Einfluß der Aktivität der übrigen Unternehmen. In einer möglichst einfachen Formulierung wird diese durch die Gesamtproduktion Q und die aktuelle Situation eines Unternehmens n durch dessen Lagerfehlbestand $(K_{i,n}^* - K_{i,n})$ beschrieben. Sein Akzeleratorkoeffizient wird daher als

$$\alpha_{i,n} = \alpha_{i,n}((K_{i,n}^* - K_{i,n}), Q) \quad (3.3.2.5)$$

angesetzt.

Über den Einfluß des Aggregats auf die Produktionsentscheidung der Einzelunternehmung wird angenommen, daß das Verhalten des Aggregats allgemeine Zukunftserwartungen widerspiegelt und daß die Einzelunternehmung hieran Anteil nimmt. Ist der aktuelle Lagerbestand des Unternehmens geringer als gewünscht und steigert das Unternehmen daher seine Produktion, so fällt die Steigerung stärker/schwächer aus, falls allgemein viel/wenig produziert wird. Besitzt das Unternehmen jedoch einen zu hohen Lagerbestand und reduziert seine Produktion, so ist die Reduktion schwächer/stärker, falls allgemein viel/wenig produziert wird.

Diese Annahmen sind in folgender Übersicht dargestellt:

**Einfluß der Gesamtproduktion auf
Akzeleratorkoeffizienten
der Produktion der Einzelunternehmung:**

Variation des Akzeleratorkoeffizienten		Aggregierte Produktion	
		$Q < 0$	$Q > 0$
Einzel- unternehmen	$K_{i,n}^* - K_{i,n} < 0$	+	-
	$K_{i,n}^* - K_{i,n} > 0$	-	+

Diese Annahmen können auf einfache Weise in einem der beiden folgenden Ansätze formalisiert werden:

$$a_{i,n}(K_{i,n}^* - K_{i,n}, Q) = w_{0,i,n}^2 [1 + h_{i,n}(K_{i,n}^* - K_{i,n}) \cdot Q] \quad (3.3.2.6)$$

oder

$$a_{i,n}(K_{i,n}^* - K_{i,n}, Q) = w_{0,i,n}^2 [1 + h_{i,n} \operatorname{sign}((K_{i,n}^* - K_{i,n}) \cdot Q)] \quad (3.3.2.7)$$

(3.3.2.6) und (3.3.2.7) sind analoge Ansätze zu (3.3.1.6) bzw. (3.3.1.9) des vorigen Kapitels. Wie gezeigt wurde, ist (3.3.1.6) instabil wegen eines Rückkopplungseffekts. Dieses trifft in gleicher Weise auf (3.3.2.6) zu; daher wird der Ansatz (3.3.2.7) bevorzugt.

Die Komplexität des durch (3.3.2.1), (3.3.2.2), (3.3.2.3), (3.3.2.4) und (3.3.2.7) gegebenen Systems erfordert numerische Simulationen. Nachfolgend werden einige Beispiele präsentiert. Wie in den

Endogene Parametervariation

Simulationsrechnungen des vorigen Kapitels werden jeweils die Resultate bei konstanten und variierenden Akzeleratorkoeffizienten miteinander verglichen (gestrichelte bzw. durchgezogene Linien); in der Darstellung von Unternehmenszyklen ist zusätzlich das zugehörige Aggregat für variierende Parameter (punktierte Linien) enthalten.

Abbildung 3.3.2.1 zeigt ein System von 5 Unternehmungen mit gleichen Eigenfrequenzen $\omega_{0,i,n}$, aber unterschiedlichen Startphasen. Bei konstanten Akzeleratorkoeffizienten beschreiben die Unternehmungen Produktionszyklen konstanter Amplituden und behalten ihre anfängliche Phasenlagen bei. Hierdurch entsteht ein aggregierter Produktionszyklus konstanter Amplitude.

Im Fall variierender Akzeleratorkoeffizienten jedoch werden die abweichenden Phasen der Einzelzyklen der Phase des Aggregats angenähert (Unternehmen 1,2,4,5; Abb. 3.3.2.1b). Zyklen, die mit dem Aggregat in etwa phasengleich sind, zeigen anwachsende Amplituden. Sowohl infolge der Phasensynchronisation als auch infolge einiger anwachsender Einzelamplituden besitzt der aggregierte Zyklus eine anwachsende Amplitude.

Das Beispiel enthält einen ebenfalls zyklisch variierenden Nachfragesektor. Die Schwankungen der Nachfrage sind als gering gewählt (Parameter d_i), so daß ihre Wirkung auf die Zyklen der Produktion vernachlässigt werden kann. Sowohl im Fall konstanter als auch im Fall variierender Akzeleratorkoeffizienten folgt der Nachfragezyklus dem Zyklus der Gesamtproduktion mit einer

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:

5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN STARTPHASEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND*GES. PRODUKTION)

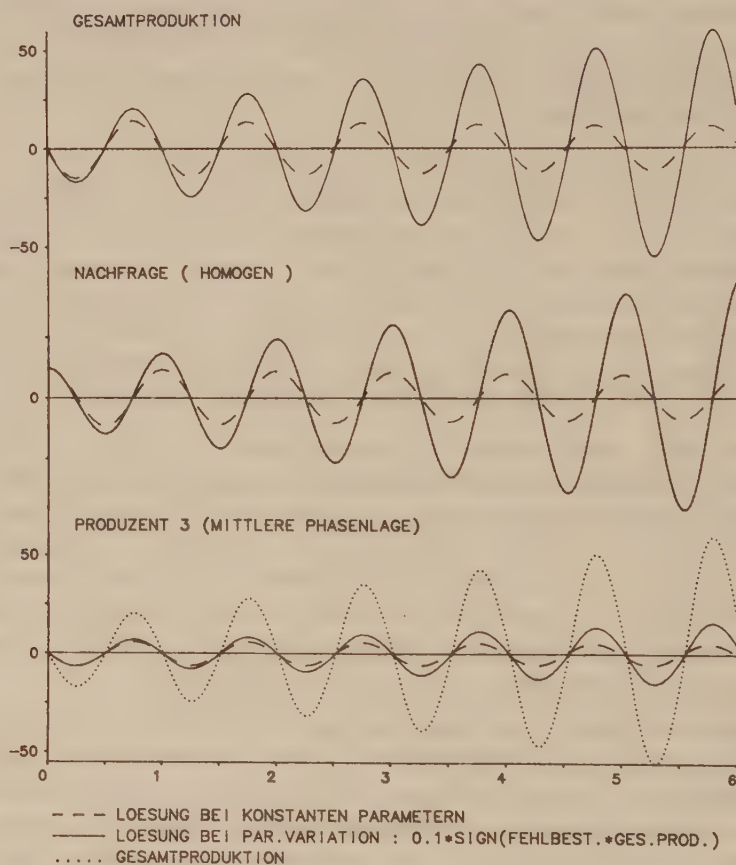


Abbildung 3.3.2.1.a

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:

5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN EIGENFREQUENZEN,
ABER UNTERSCHIEDLICHEN STARTPHASEN;
AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND*GES.PRODUKTION)

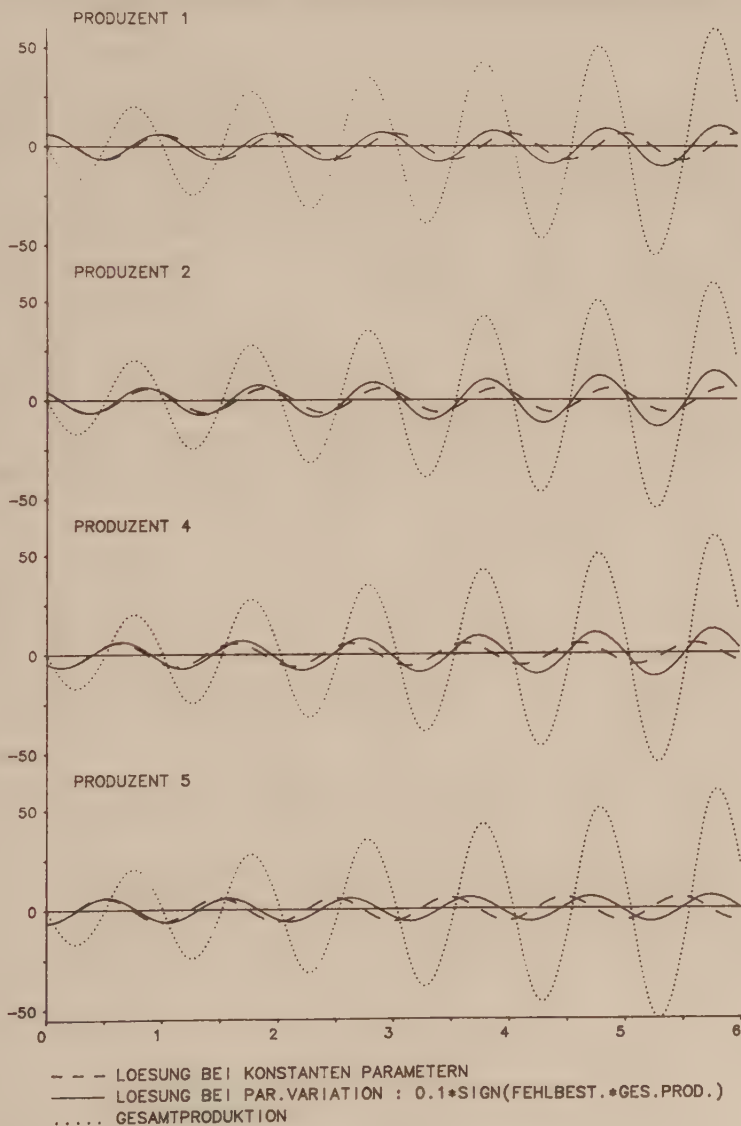


Abbildung 3.3.2.1.b

Endogene Parametervariation

Verzögerung von einer Viertelperiode. Dieses entspricht den Befunden der Phasenanalyse aus Kapitel 2.1.2 für das aggregierte Lagerzyklusmodell.¹

In den Abbildungen 3.3.2.2 und 3.3.2.3 wird ein System von 5 Unternehmungen mit gleichen Anfangsphasen, aber unterschiedlichen Eigenfrequenzen $w_{0,i,n}$ untersucht. Die Akzeleratorkoeffizienten weichen von ihrem Mittelwert um 0%, $\pm 10\%$ und $\pm 20\%$ ab und implizieren voneinander verschiedene Zyklen (Frequenzen: ca. 90%, 95%, 100%, 105%, 110% ihres Mittelwerts).

Im vorliegenden Fall ist die Streuung der Frequenzen stärker als in allen zuvor in den Kapiteln 2.3, 3.2 und 3.3.1 gezeigten Beispielen. Der Auslöschungseffekt im Aggregat bei konstanten Parametern ist daher ebenfalls stärker: Nach zweieinhalb Perioden beträgt die Amplitude des aggregierten Produktionszyklus nur noch etwa ein Drittel des Anfangswerts.

Bei variierenden Parametern hingegen werden die relativ langsamen Zyklen (Unternehmen 1 und 2) beschleunigt und die relativ schnellen Zyklen (Unternehmen 4 und 5) verzögert; ferner wachsen die Amplituden einiger Einzelzyklen an. Die Beispiele aus Abbildung 3.3.2.2 und 3.3.2.3 unterscheiden sich durch die Stärke der gegenseitigen Beeinflussung (Parameter $h_{i,n}=0.1$ bzw. $h_{i,n}=0.15$). Im ersten Fall (Abbildung 3.3.2.2) ist der Auslöschungseffekt zwar deutlich geringer als für konstante Parameter, aber die Wirkung der Parametervariation ist zu gering, um die Abnahme der Amplitude des aggregierten Zyklus zu verhindern. Im

¹ Vergl. das Phasendiagramm des Lagerzyklus (Abb. 2.1.2).

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:
 5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND*GES.PRODUKTION)

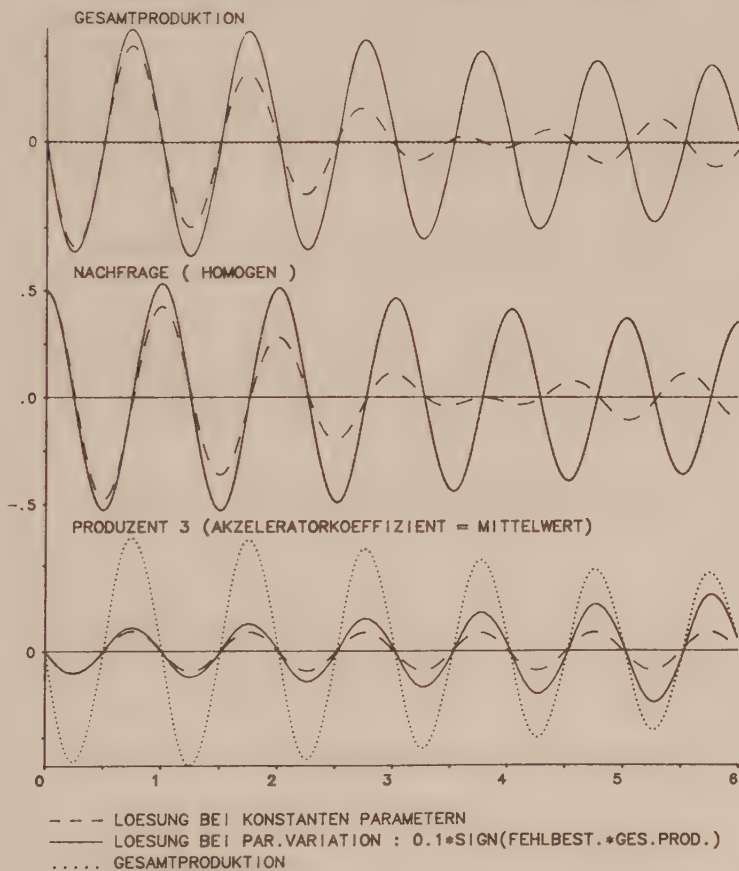


Abbildung 3.3.2.2.a

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:
 5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND * GES. PRODUKTION)

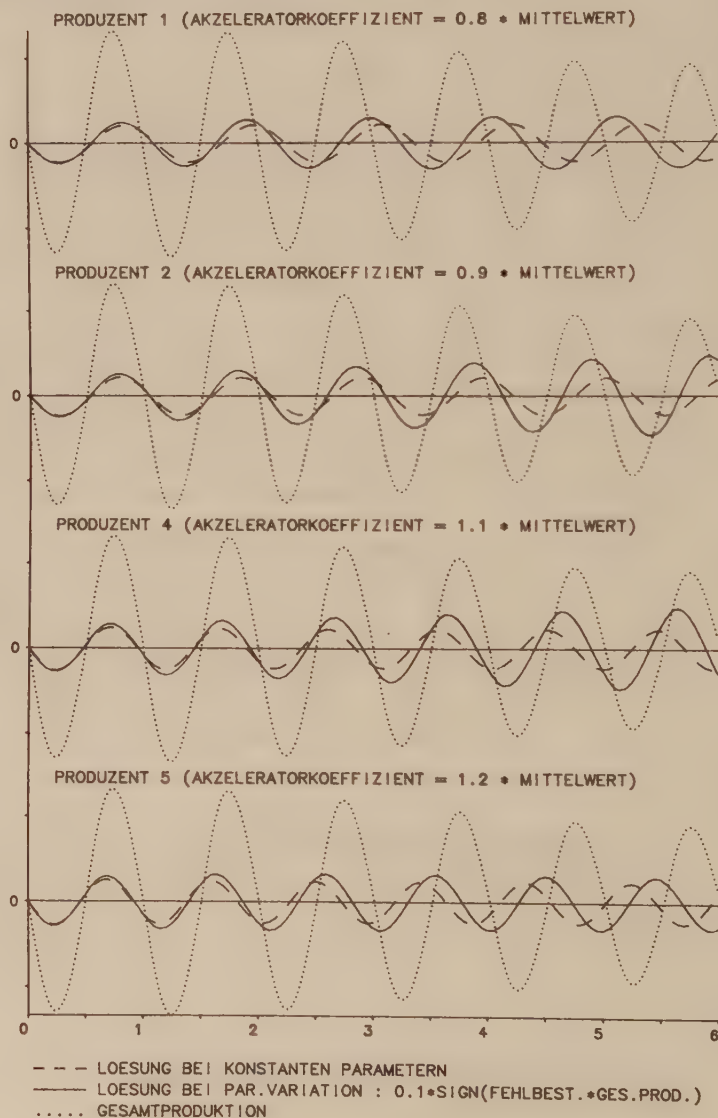


Abbildung 3.3.2.2.b

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:
 5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND*GES.PRODUKTION)

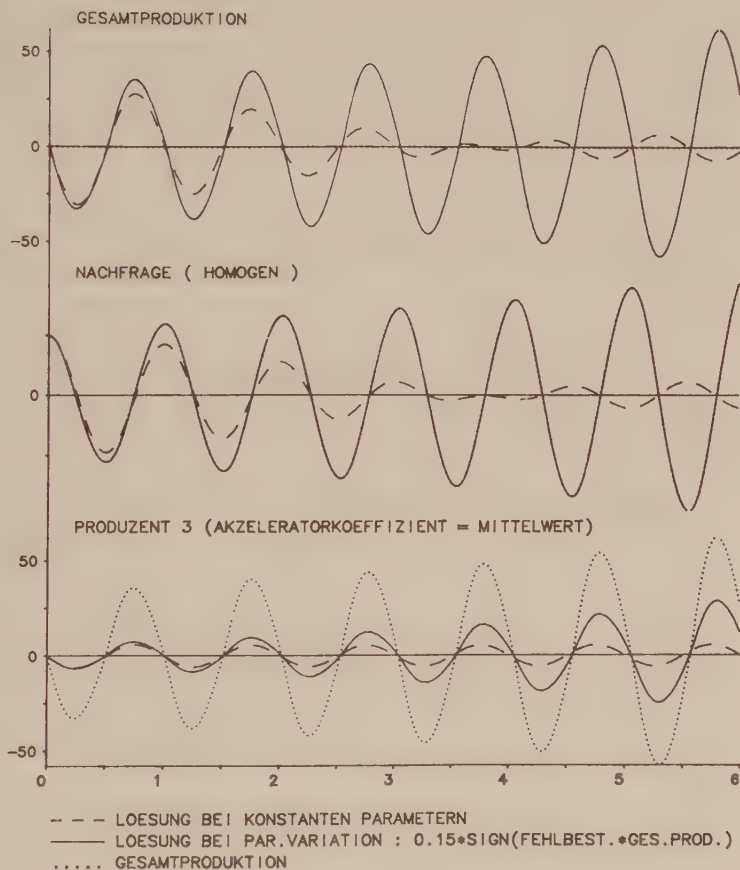


Abbildung 3.3.2.3.a

DISAGGREGIERTER LAGERZYKLUS:
 5 PRODUZENTEN MIT GLEICHEN STARTPHASEN,
 ABER UNTERSCHIEDLICHEN EIGENFREQUENZEN;
 AKZELERATORKOEFF. (FEHLBESTAND * GES. PRODUKTION)

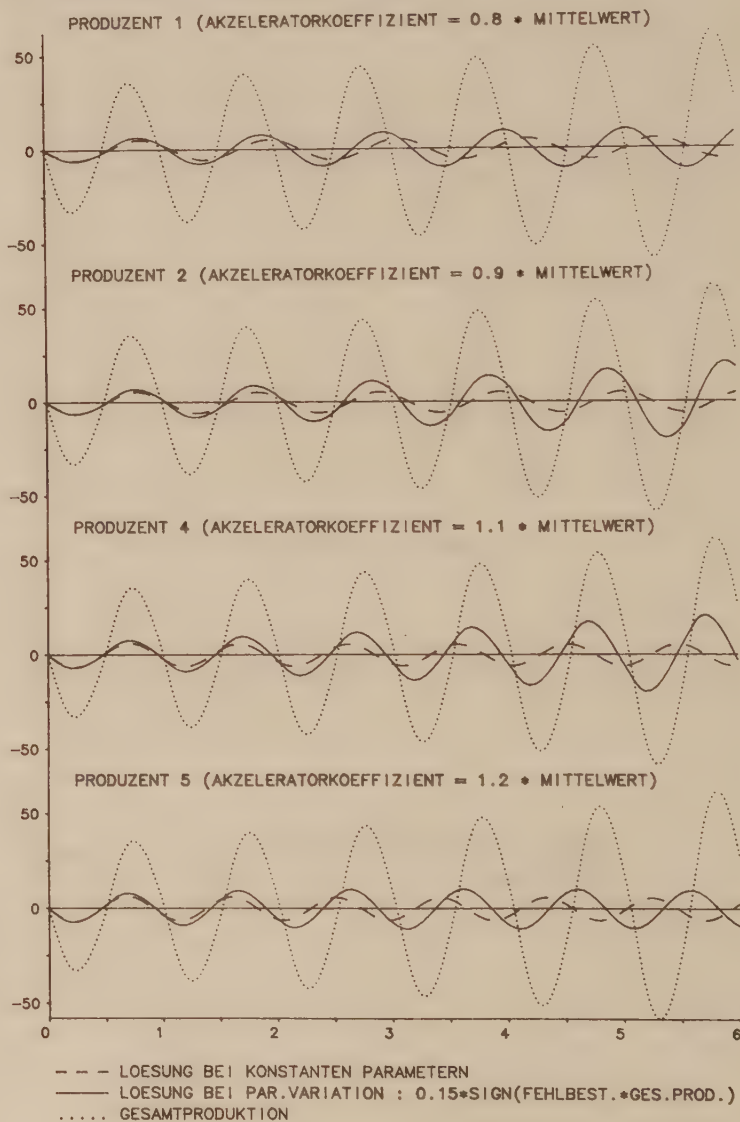


Abbildung 3.3.2.3.b

Endogene Parametervariation

zweiten Fall hingegen ist der Mechanismus ausreichend stark, um eine Zunahme des aggregierten Zyklus zu verursachen.

Hinsichtlich des Zyklus in der Nachfrage bestätigen auch diese Beispiele die in Kapitel 2.1.2 für das aggregierte Modell berechneten Phasenlagen (Produktionszyklus um eine Viertelperiode vor dem Nachfragezyklus).

Die vorgeschlagene Variation der Akzeleratorkoeffizienten der Produktion kann als Modellgrundlage zur Erklärung aggregierter Lagerzyklen dienen. Die entsprechende Argumentation (Zerlegung des Aggregats in kohärenten und inkohärenten Anteil etc.) ist streng analog zu den Ausführungen des vorigen Kapitels.

Somit liegt ein hinsichtlich des Aggregationsproblems erklärendes Modell des Lagerzyklus vor. Zusammen mit dem Modell der exogenen Parametervariation (Kapitel 3.2) können damit alle drei eingangs des dritten Abschnitts gestellten Fragen positiv beantwortet werden.

Im nachfolgenden Kapitel werden anhand des disaggregierten Gesamtmodells beider Zyklen das Zusammenwirken aller Erklärungskomponenten geprüft und die beiden alternativen Erklärungsmodelle des Ausrüstungszyklus kombiniert.

3.3.3 Gesamtmodell von Lager- und Ausrüstungszyklus

In den vorhergehenden Kapiteln wurde das Aggregationproblem für Einzelmodelle des Ausrüstungszyklus und des Lagerzyklus untersucht. Ausgehend von der Idee variierender Parameter wurden verschiedene Ansätze entwickelt, welche für die jeweils

Endogene Parametervariation

einzelnen betrachteten Bereiche zu erklärenden Modellen hinsichtlich des Aggregationsproblems führen. In diesem Kapitel wird die Kombination aller dieser Ansätze im Rahmen eines Gesamtmodells für Lager- und Ausrüstungszyklus untersucht.

Das Interesse ist auf die folgenden drei Fragen konzentriert:

- (i) Sind die beiden Konzepte zur Aggregation des Ausrüstungszyklus (exogene vs. endogene Parametervariation) kombinierbar? Was ergibt die Annahme, ein Teil der Unternehmen verhalte sich gemäß Kapitel 3.2, der übrige Teil gemäß Kapitel 3.3.1?
- (ii) Ist das Modell des Lagerzyklus (endogene Parametervariation) stabil hinsichtlich der Überlagerung eines kurzen und eines langen Zyklus?
- (iii) Ist die in Kapitel 3.2 vorhergesagte Phasenrelation zwischen Lager- und Ausrüstungszyklus (entsprechend der "M"-Form) ausgezeichnet?

Um diese Fragen zu bearbeiten, wird das Gesamtmodell für Lager- und Ausrüstungszyklus (vgl. Kapitel 2.1.3) untersucht. Sowohl der Ausrüstungssektor als auch der Produktionssektor werden disaggregiert formuliert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird es in elementarerer Version (Nachfrage konstant, kein Wachstum) betrachtet.

Die Wirtschaft bestehe aus U Unternehmen, wobei für alle Unternehmen n ($n=1,2,..U$) folgende Annahmen getroffen werden:

Endogene Parametervariation

Die Veränderung der Ausrüstungsinvestitionen des Unternehmens n ist wie in (2.1.3.3) durch eine Akzeleratorgleichung gegeben:

$$DI_{e,n} = D^2 K_{e,n} = \alpha_{e,n} (K_{e,n}^* - K_{e,n}) \quad (3.3.3.1)$$

Der angestrebte Kapitalbestand $K_{e,n}^*$ des Unternehmens wird als proportional zur Gesamtnachfrage Z angesetzt (vgl. (2.1.3.4)):

$$K_{e,n}^* = k_{e,n} Z \quad (3.3.3.2)$$

Die Produktion Q_n des Unternehmens unterliegt der Akzeleratorgleichung (2.1.3.5):

$$DQ_n = \alpha_{i,n} (K_{i,n}^* - K_{i,n}) \quad (3.3.3.3)$$

Der angestrebte Lagerbestand $K_{i,n}^*$ wird als proportional zur Summe von Nachfrage und Gesamtausrüstungsinvestitionen I_e angesetzt:

$$K_{i,n}^* = k_{i,n} (Z + I_e) = k_{i,n} \left(Z + \sum_{n=1}^U I_{e,n} \right) \quad (3.3.3.4)$$

Über die Nachfrage wird angenommen, sie sei konstant und gleichmäßig auf alle Unternehmungen aufgeteilt. Auch von den Ausrüstungsinvestitionen wird angenommen, daß die Käufe von Ausrüstungsgütern gleichmäßig aus den Lagern aller Unternehmungen erfolgen. Die Änderungen des Lagerbestandes $K_{i,n}$ des Unternehmens n ergeben sich hiernach als:

$$DK_{i,n} = Q_n - \frac{1}{U} (Z + I_e) = Q_n - \frac{Z}{U} - \frac{1}{U} \sum_{n=1}^U I_{e,n} \quad (3.3.3.5)$$

Für die Variation der Akzeleratorkoeffizienten der Produktion wird ein Ansatz gemäß (3.3.2.7) gewählt:

$$\alpha_{i,n} (K_{i,n}^* - K_{i,n}, Q) = w_{0,i,n}^2 [1 + h_{i,n} \operatorname{sign}((K_{i,n}^* - K_{i,n}) \cdot Q)] \quad (3.3.3.6)$$

Hierin bezeichnet Q die aggregierte Produktion.

Endogene Parametervariation

Für die Variation der Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen stehen zwei Ansätze zur Verfügung:

- (1) Entsprechend dem Konzept der endogenen Parametervariation (Gleichung (3.3.1.9)) ergibt sich:

$$\alpha_{e,n}(K_{i,n}^* - K_{e,n}, I_e) = w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n}^{(1)} \text{sign}((K_{i,n}^* - K_{e,n}) \cdot I_e)] \quad (3.3.3.7)$$

- (2) Nach den Ausführungen in Kapitel 3.2 kann die Parametervariation auch durch einen Einfluß des Lagerzyklus modelliert werden. Wird dieser Argumentation gefolgt und der aggregierte Lagerfehlbestand mit

$$K_i^* - K_i = \sum_{n=1}^N (K_{i,n}^* - K_{i,n}) \quad (3.3.3.8)$$

bezeichnet, so lautet der der exogenen Parametervariation entsprechende Ansatz für die Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen:

$$\alpha_{e,n}(K_{i,n}^* - K_{e,n}, I_e) = w_{0,e,n}^2 [1 + h_{e,n}^{(2)} \text{sign}(K_i^* - K_i)] \quad (3.3.3.9)$$

mit positiven Werten für $h^{(2)}_{e,n}$.¹

Für die Simulationrechnungen wird ein System von 15 Unternehmen betrachtet, von welchen je drei übereinstimmende Akzeleratorkoeffizienten besitzen. Die je fünf verschiedenen Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen und der Produktion betragen 80%, 90%, 100%, 110% und 120% ihres jeweiligen Mittelwerts.²

¹ Um der Stabilität des Systems willen wird auch hier die Parametervariation begrenzt (Vorzeichenfunktion).

² Diese Streuung entspricht den Beispielen des vorigen Kapitels (Abbildungen 3.3.2.2 und 3.3.2.3).

Endogene Parametervariation

Die jeweils drei Unternehmen mit übereinstimmenden Akzeleratorkoeffizienten besitzen unterschiedliche Startwerte: Die Startphasen weichen von der Startphase des Aggregats um $+1/4$, 0 , $-1/4$ Periode ab; bei Unternehmen mit den mittleren Startphasen besitzen die Anfangsamplituden den doppelten Wert der jeweils anderen beiden Unternehmen.

Über die Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen wird bei den Unternehmen der mittleren Anfangsphasen eine Variation gemäß (3.3.3.9), bei den übrigen eine Variation gemäß (3.3.3.7) angenommen. Für die Stärke der Variation ($h_{i,n}$, $h^{(1)}_{e,n}$, $h^{(2)}_{e,n}$) wird einheitlich ein Wert von 0.1 gewählt.

Abbildung 3.3.3.1 zeigt eine derartige Simulation. Die Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen betragen jeweils ein Viertel des Wertes der Akzeleratorkoeffizienten der Produktion (2:1-Relation der entsprechenden Zyklen). Die relative Phasenlage zwischen dem kurzen und dem langen Zyklus ist derart gewählt, daß (entsprechend der "M"-Form) Minima der Gesamtproduktion mit Extrema der aggregierten Ausrüstungsinvestitionen zusammenfallen. Der Vergleich der aggregierten Lösungen (Abbildung 3.3.3.1a) zeigt deutliche Auslöschungseffekte für konstante Parameter, nicht jedoch für variierende Parameter.

Die Unternehmen 7-9 (Abbildungen d/i) besitzen Akzeleratorkoeffizienten, die den aggregierten Zyklen entsprechen. Bei diesen Unternehmen sind deutlich die Merkmale "kohärenter" Unternehmen zu beobachten (Phasensynchronisation, anwachsende Amplituden). Diese Effekte nehmen mit zunehmender Differenz der

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN;
 VARIATION DER AKZELERATORKOEFFIZIENTEN:
 PRODUKTION: $0.1 * \text{SIGN}(\text{LAGERFEHLKAP.} * \text{GES. PROD.})$
 AUSRUEST.: TEILS ENDOGEN, TEILS MIT LAGERZYKLUS

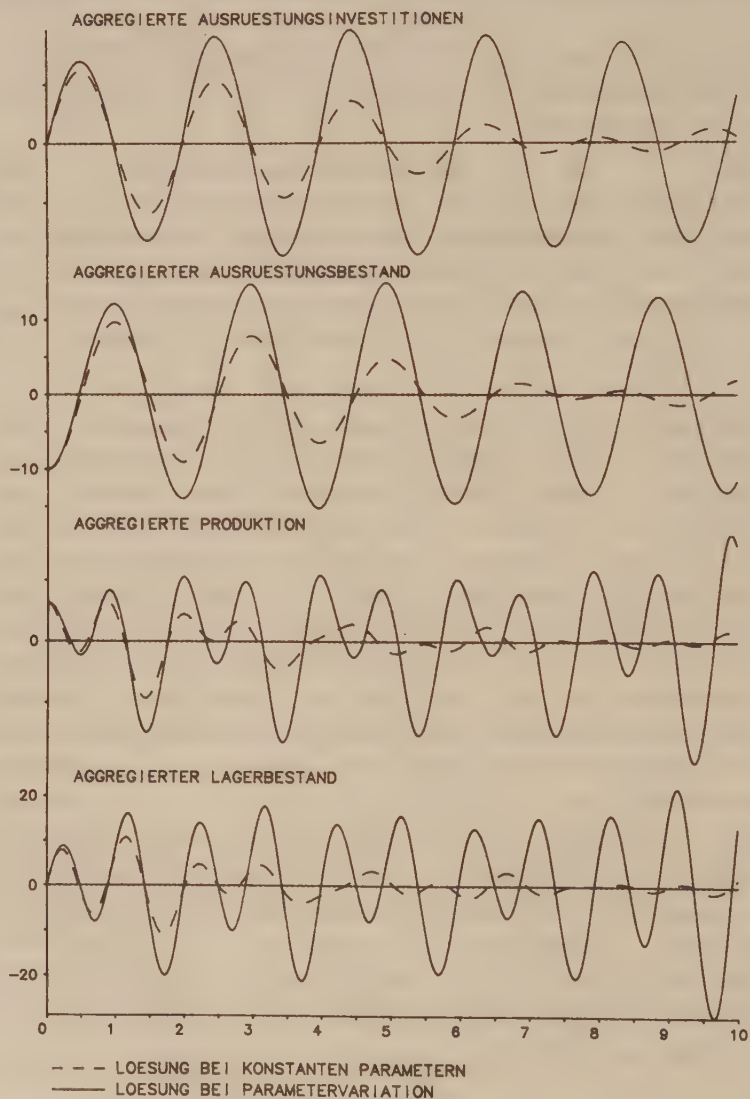


Abbildung 3.3.3.1.a

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 1 - 3 : AKZELERATORKOEFF. = 80%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

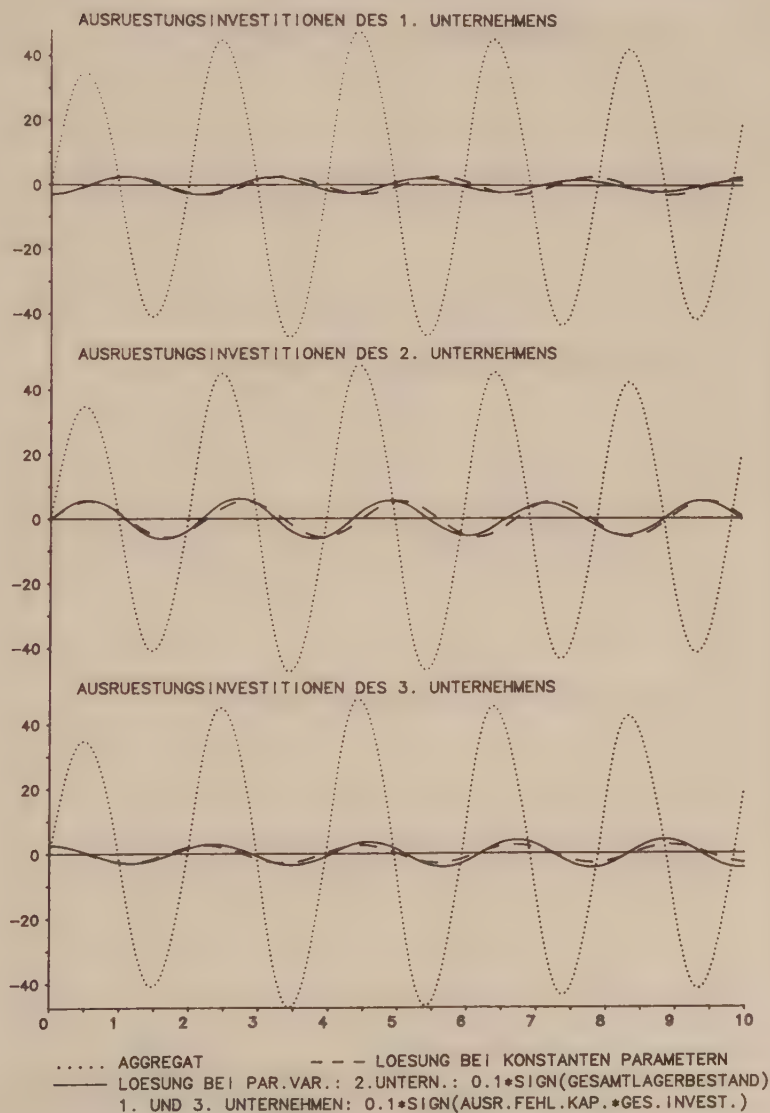


Abbildung 3.3.3.1.b

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 4 - 6 : AKZELERATORKOEFF. = 90%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

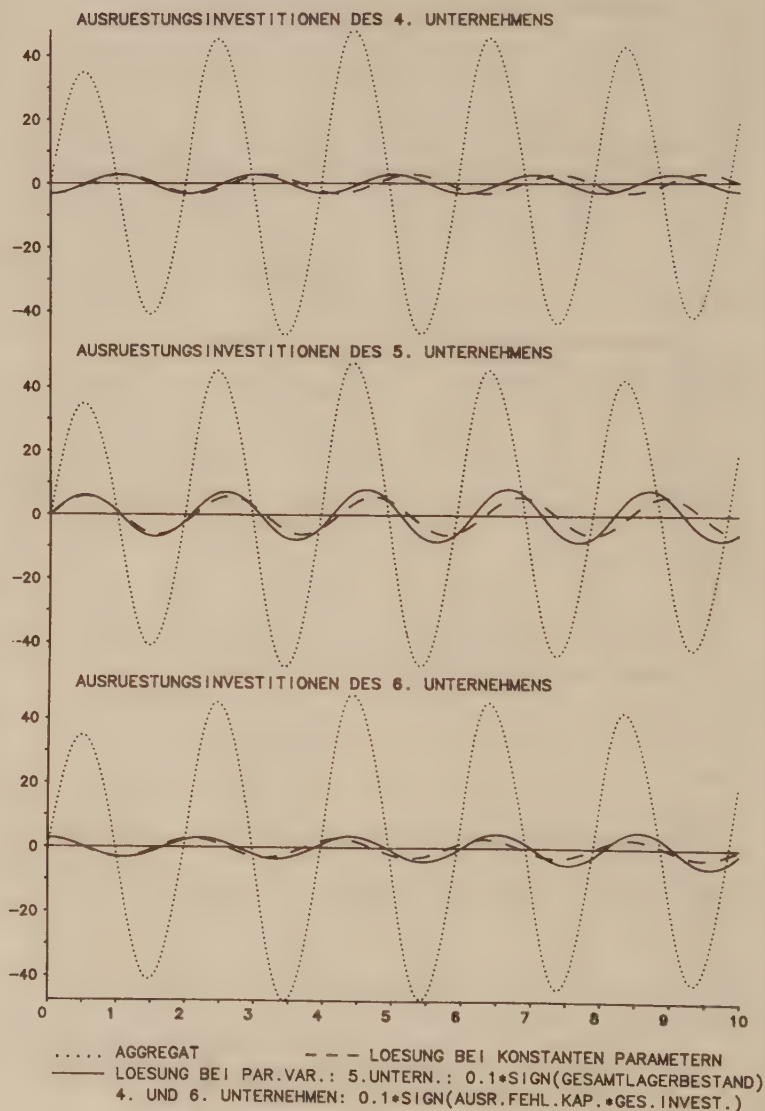


Abbildung 3.3.3.1.c

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 7 - 9 : AKZELERATORKOEFF. = MITTELW.
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

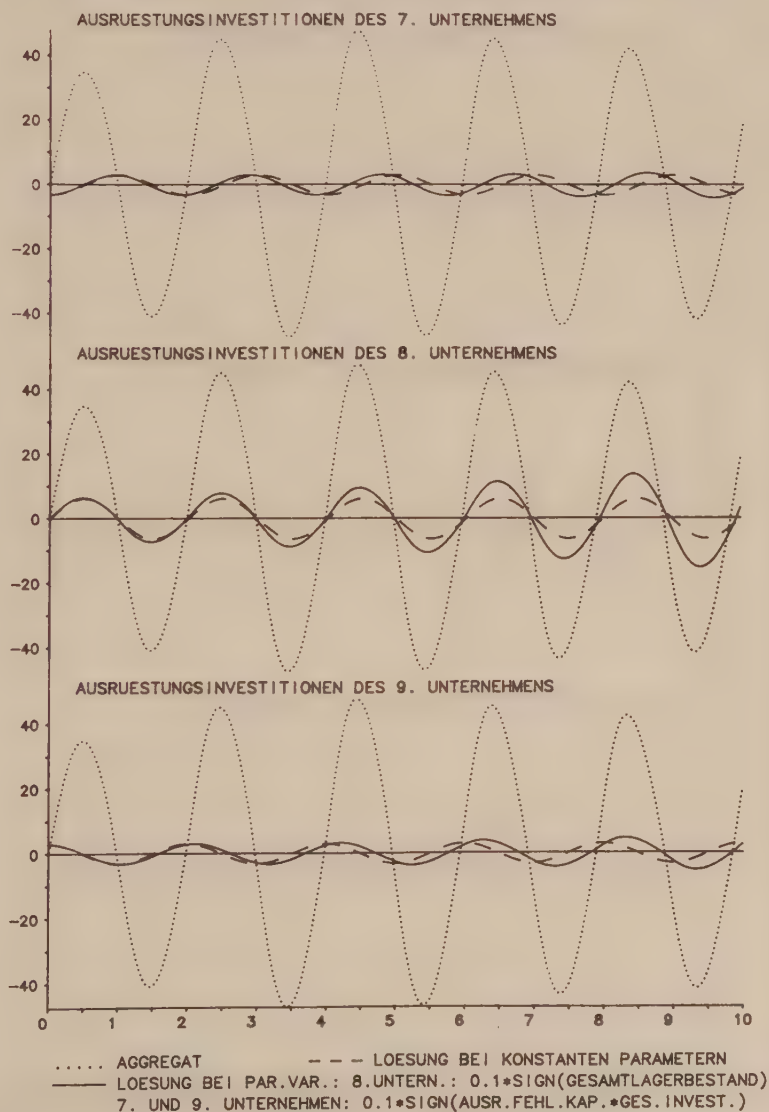


Abbildung 3.3.3.1.d

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 10 - 12 : AKZELERATORKOEFF. = 110%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

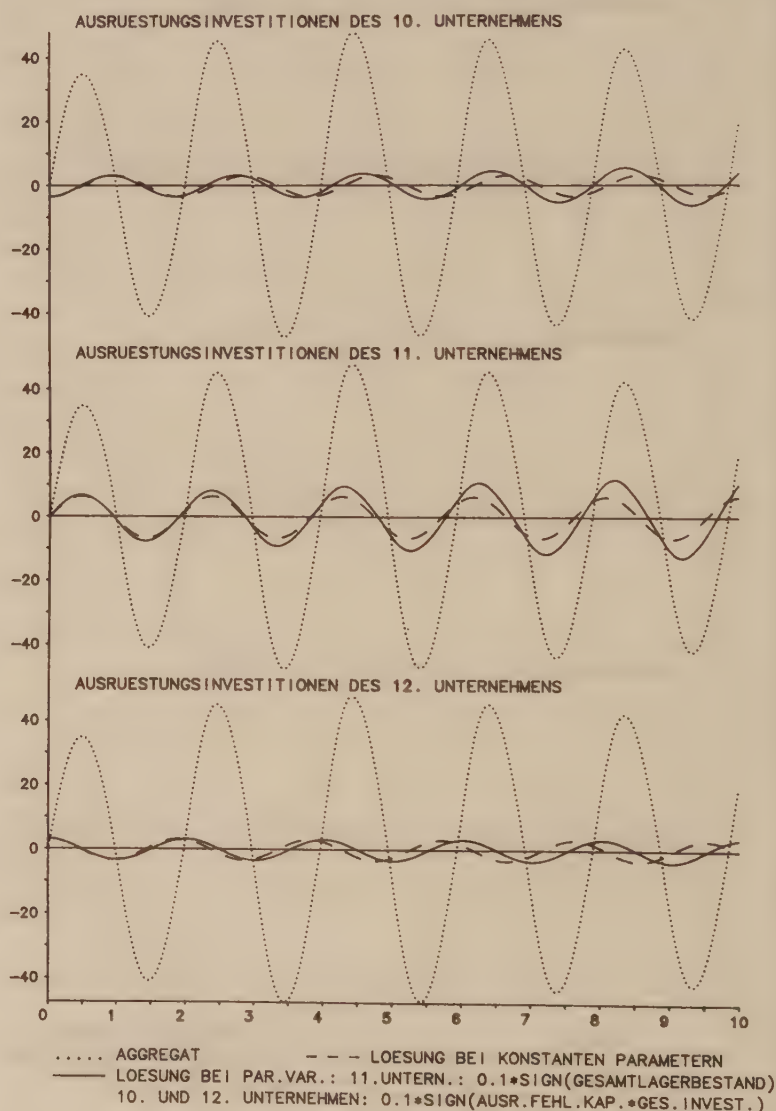


Abbildung 3.3.3.1.e

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 13 - 15 : AKZELERATORKOEFF. = 120%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

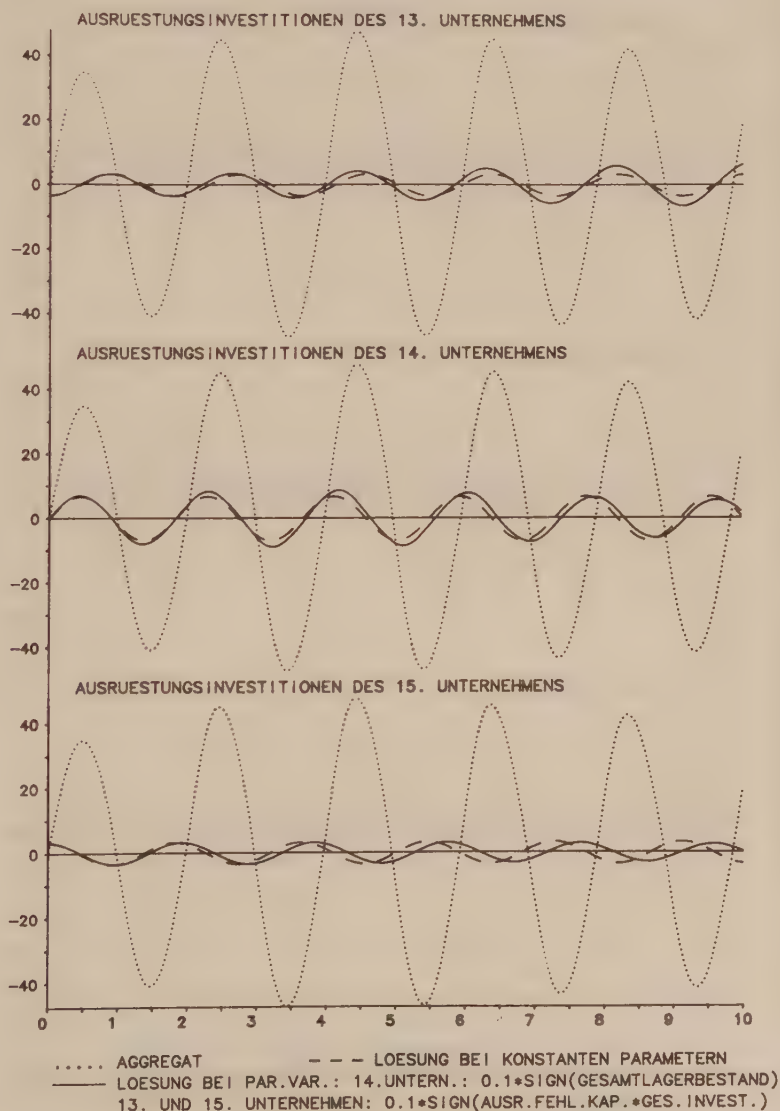


Abbildung 3.3.3.1.f

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 1 - 3 : AKZELERATORKOEFF. = 80%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

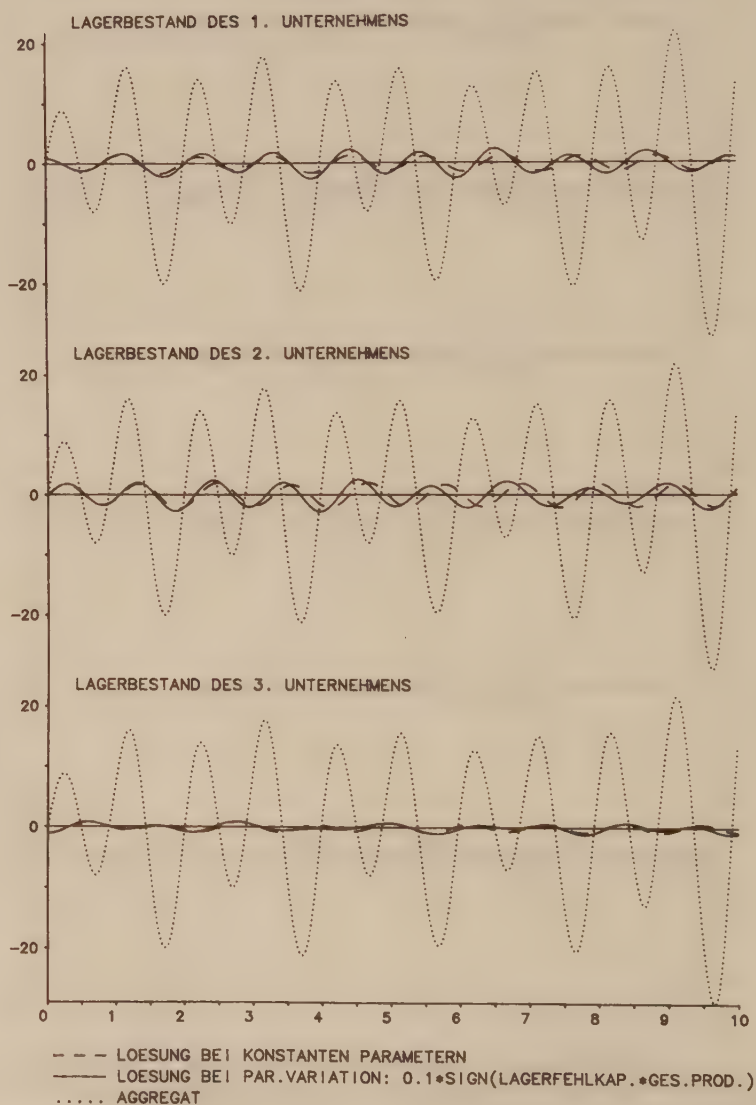


Abbildung 3.3.3.1.g

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 4 - 6 : AKZELERATORKOEFF. = 90%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

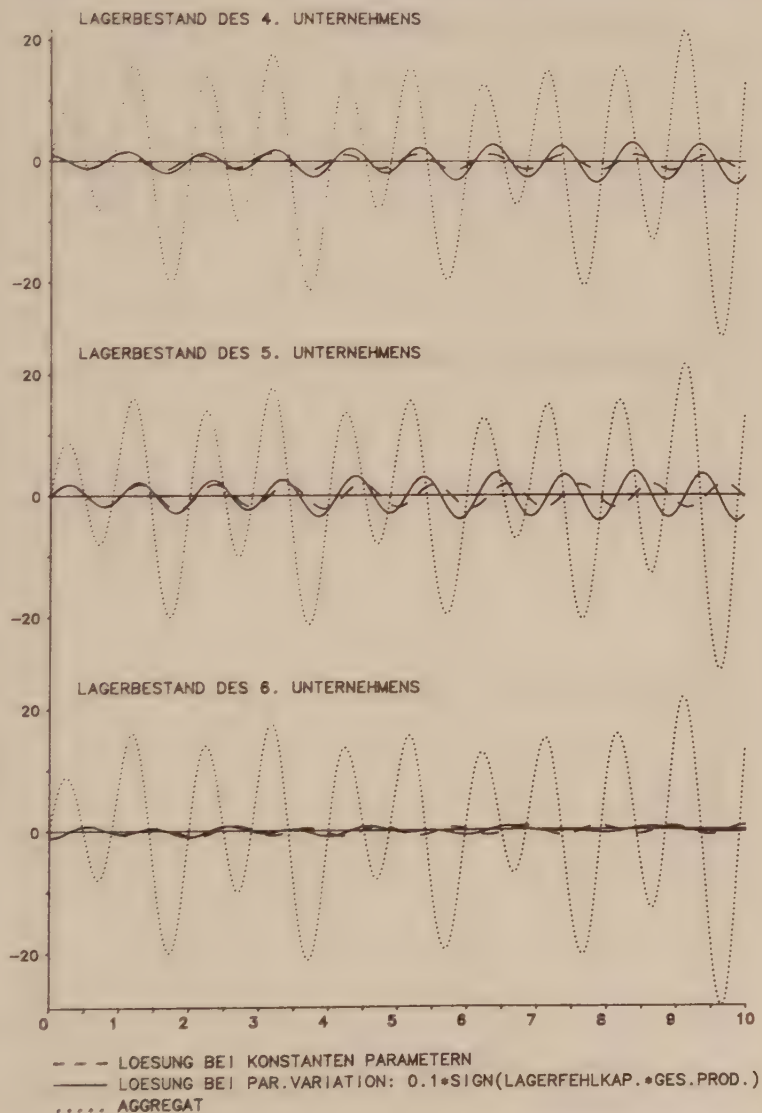


Abbildung 3.3.3.1.h

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 7 - 9 : AKZELERATORKOEFF. = MITTELW.
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

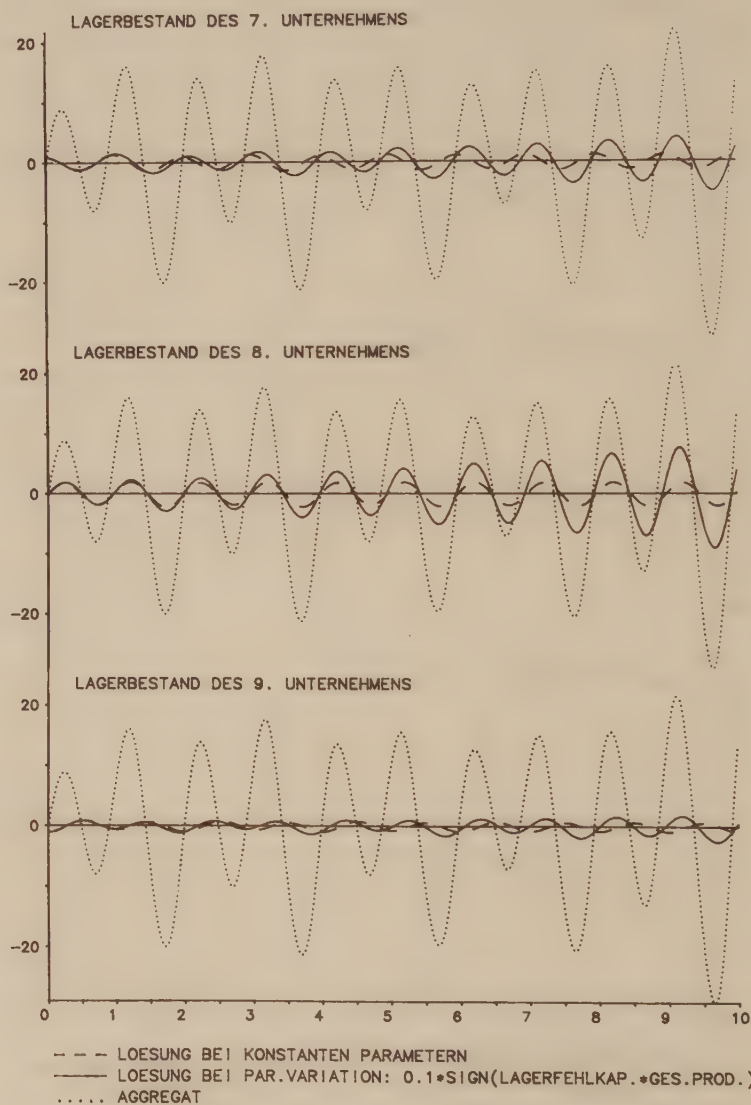


Abbildung 3.3.3.1.i

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 10 - 12 : AKZELERATORKOEFF. = 110%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

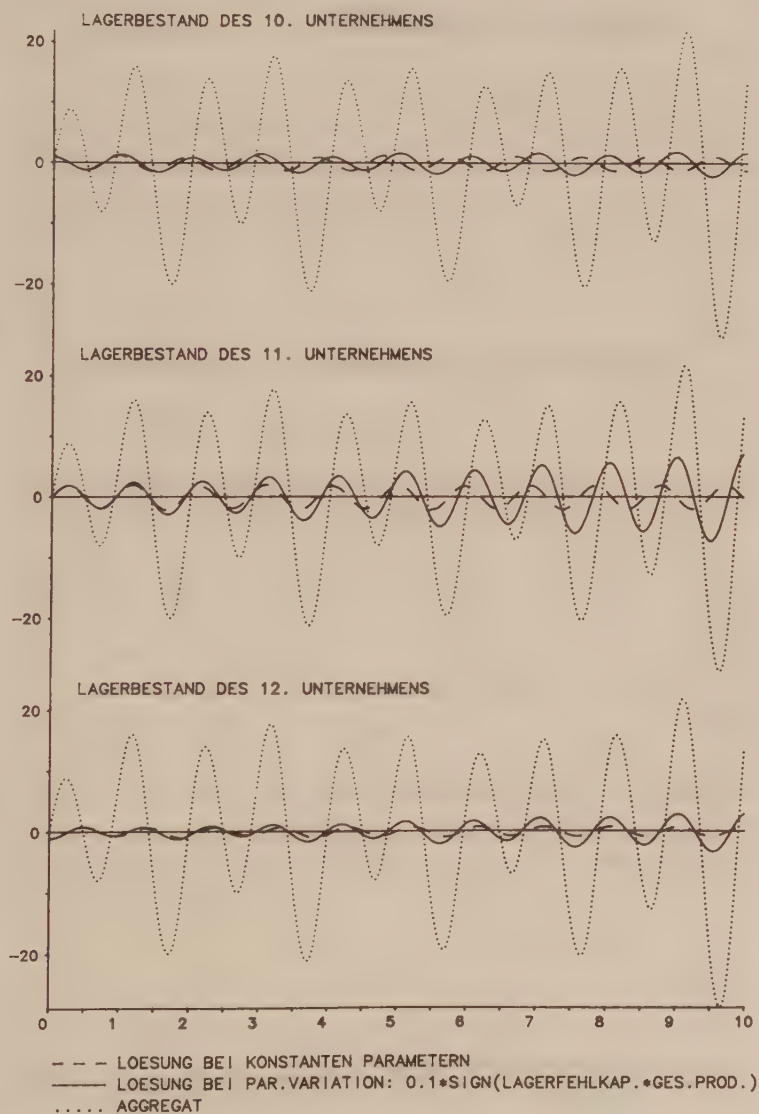


Abbildung 3.3.3.1.j

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 13 - 15 : AKZELERATORKOEFF. = 120%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

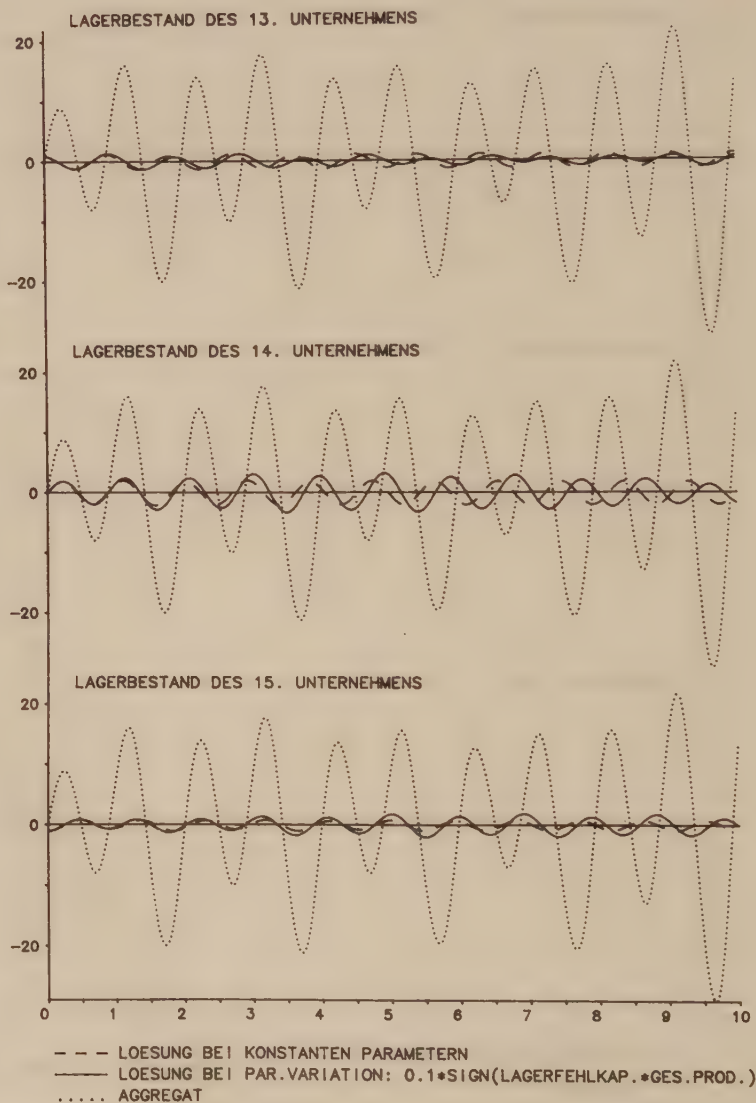


Abbildung 3.3.3.1.k

Endogene Parametervariation

Akzeleratorkoeffizienten vom Mittelwert ab; die Unternehmen 1-3 und 13-15 können eindeutig dem inkohärenten Teil des Aggregats zugeordnet werden.

Abbildung 3.3.3.2 zeigt eine Variante des vorigen Beispiels und demonstriert die Stabilität der 2:1-Relationen: Alle Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen wurden um 10% vermindert und betragen nun 70%, 80%, 90%, 100% und 110% des Mittelwerts des ersten Beispiels. Alles übrige ist unverändert.

Hiernach könnte im Vergleich zum vorigen Beispiel eine Verlangsamung des aggregierten Ausrüstungszyklus um etwa 5% (entsprechend einer Viertelperiode im Gesamtintervall von 5 Perioden) erwartet werden. Der Vergleich der Ausrüstungszyklen (Abbildungen 3.3.3.1a und 3.3.3.2a, jeweils obere Teilbilder) zeigt jedoch eine nahezu völlige Übereinstimmung der Zyklen (!).¹

Eine nähere Betrachtung der Zyklen der Einzelunternehmen bietet eine Erklärung des Phänomens. Im zweiten Beispiel sind es die Unternehmen 10-12, deren Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen die 2:1-Relation exakt erfüllen und daher den Kern des kohärenten Anteils des Aggregats bilden. Die vorgenommene Verminderung aller Akzeleratorkoeffizienten wirkt letztlich nur auf die Zusammensetzung des inkohärenten Anteils (drei Unternehmen mit 70% anstelle von 120% des resonanzgünstigen Mittelwertes) und somit kaum auf den aggregierten Zyklus.

¹ Man beachte insbesondere das Ende der Beobachtungsintervalle.

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN;
 VARIATION DER AKZELERATORKOEFFIZIENTEN:
 PRODUKTION: $0.1 * \text{SIGN}(\text{LAGERFEHLKAP.} * \text{GES. PROD.})$
 AUSRUEST.: TEILS ENDOGEN, TEILS MIT LAGERZYKLUS

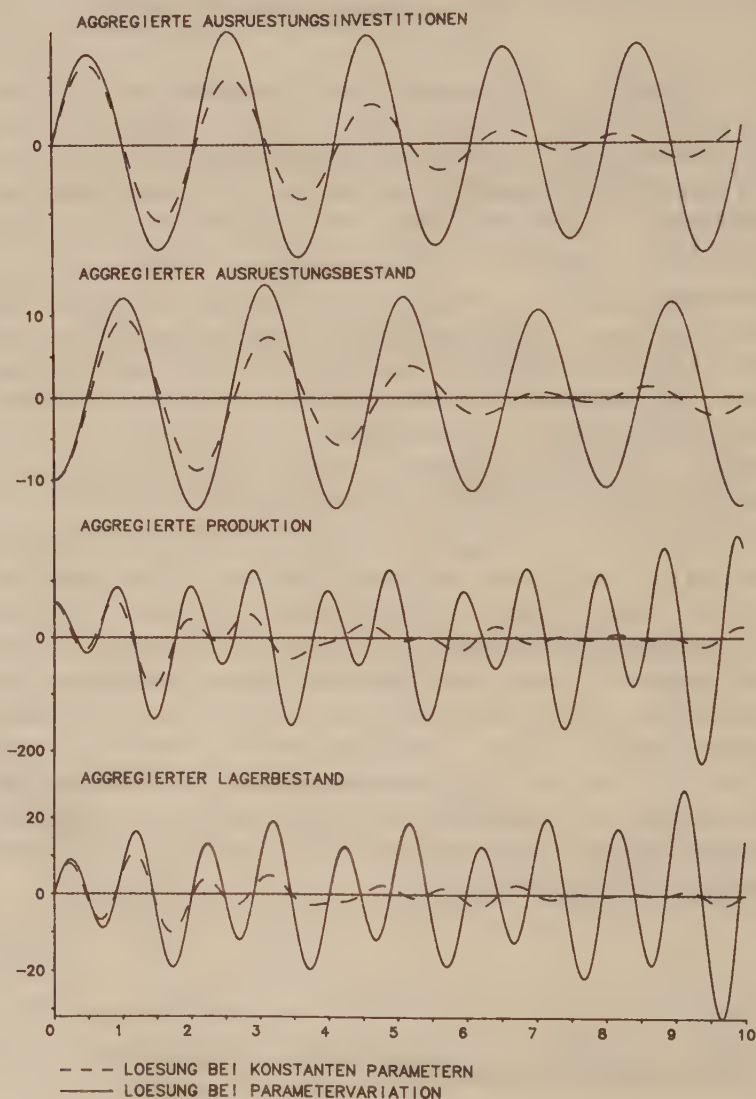


Abbildung 3.3.3.2.a

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 1 - 3 : AKZELERATORKOEFF. = 70%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

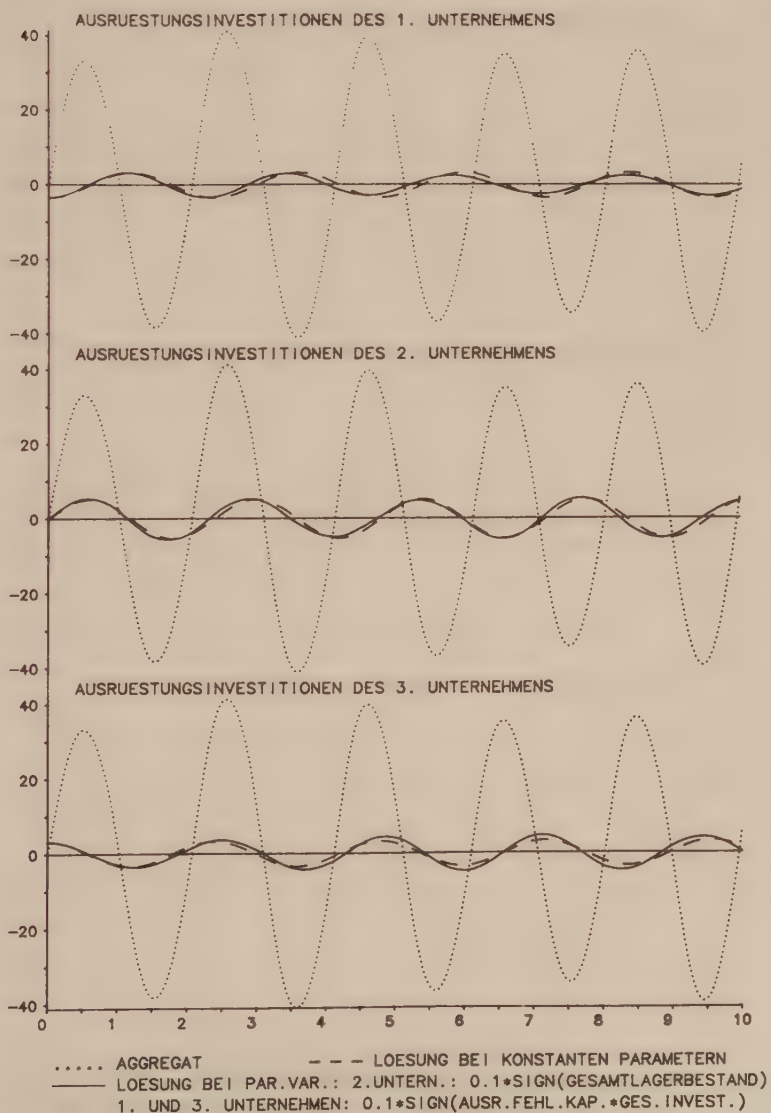


Abbildung 3.3.3.2.b

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 4 - 6 : AKZELERATORKOEFF. = 80%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

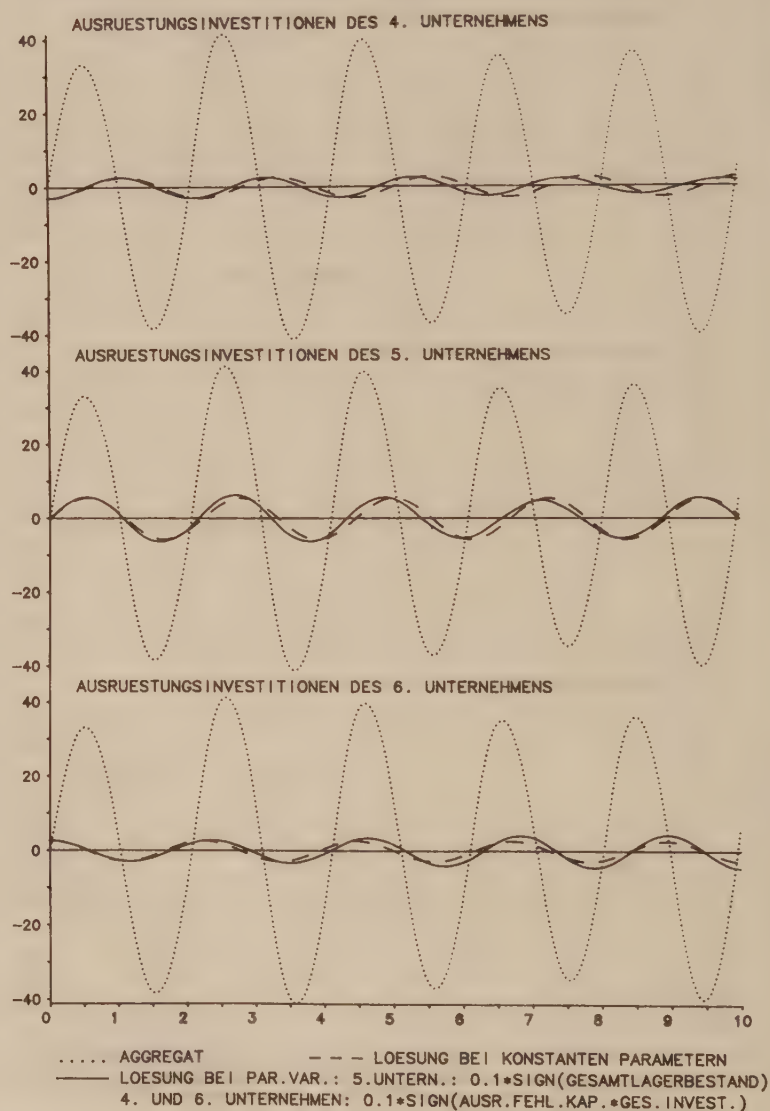


Abbildung 3.3.3.2.c

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 7 - 9 : AKZELERATORKOEFF. = 90%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

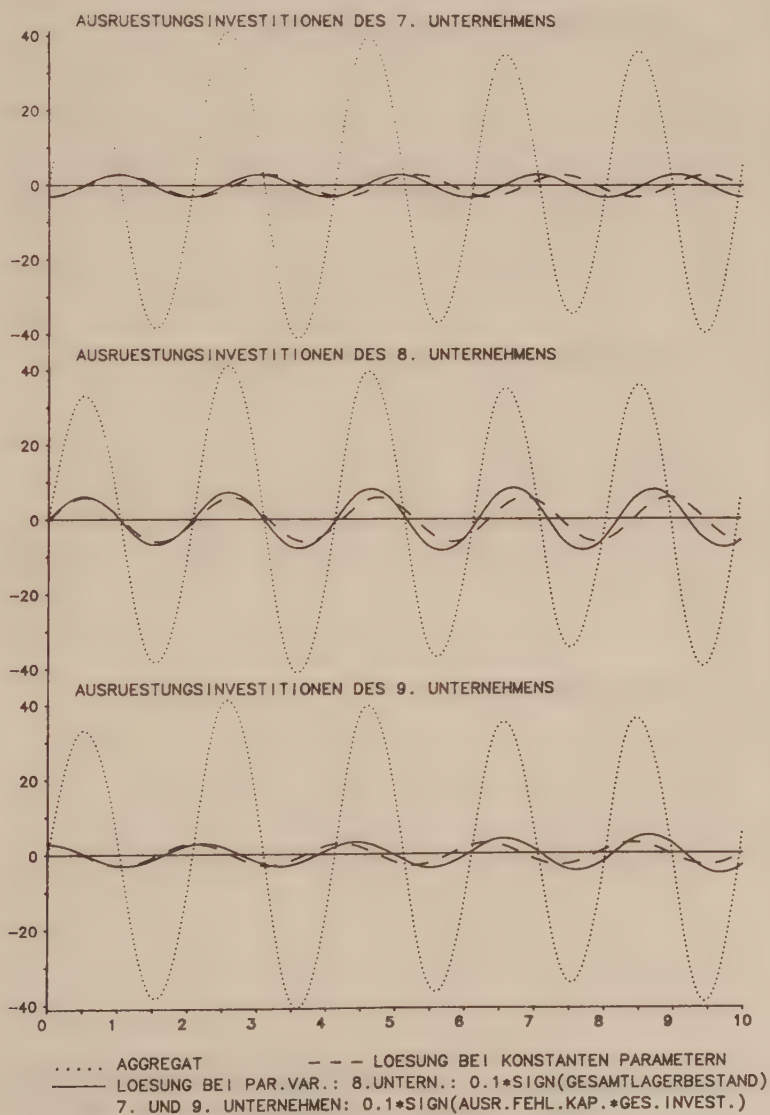


Abbildung 3.3.3.2.d

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 10 - 12 : AKZELERATORKOEFF. = MITTEL
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

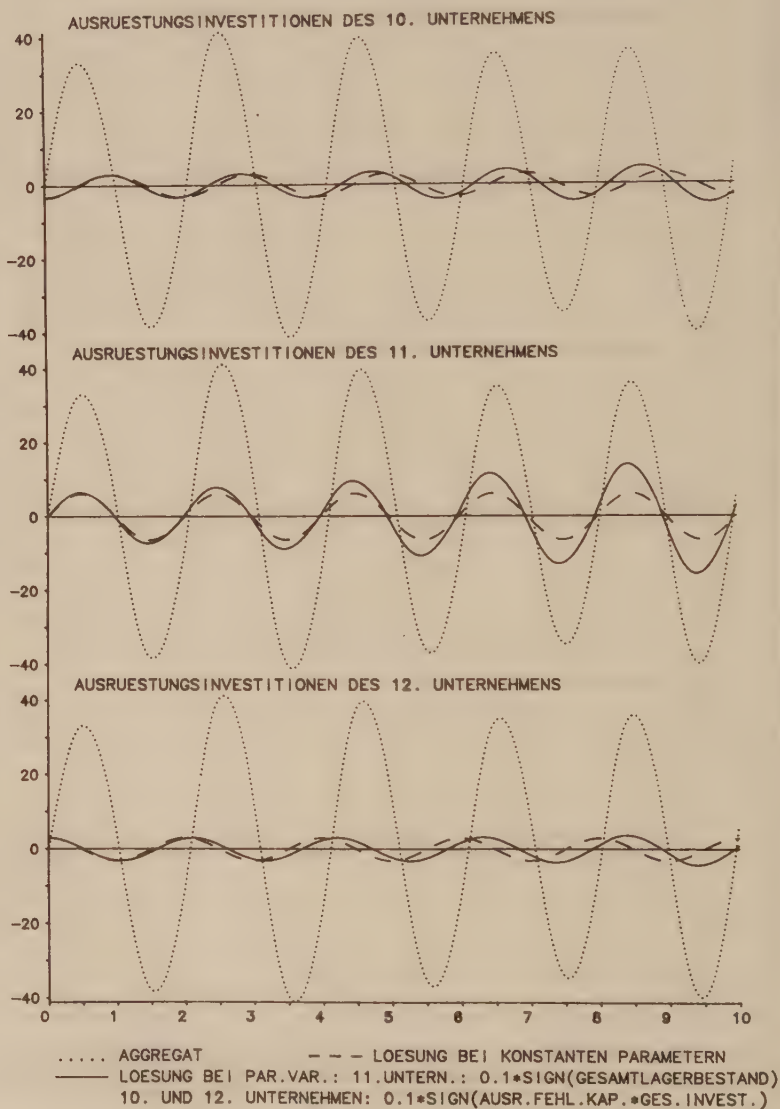


Abbildung 3.3.3.2.e

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 13 - 15 : AKZELERATORKOEFF. = 110%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

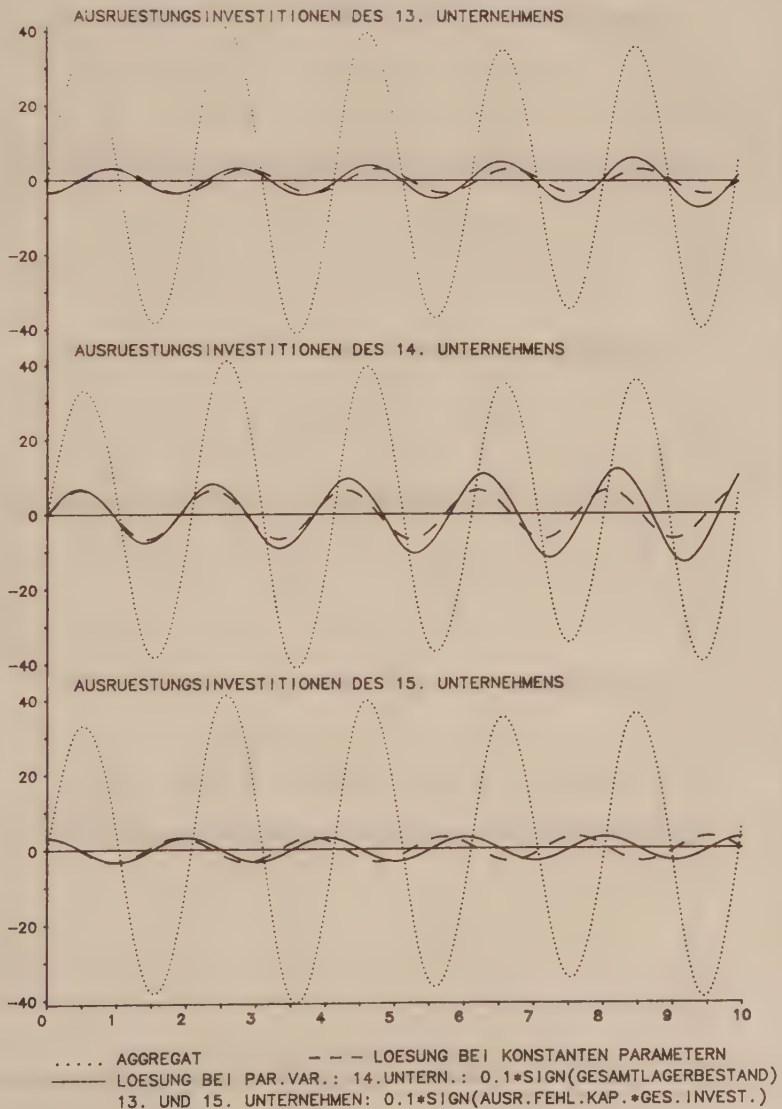


Abbildung 3.3.3.2.f

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 1 – 3 : AKZELERATORKOEFF. = 80%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

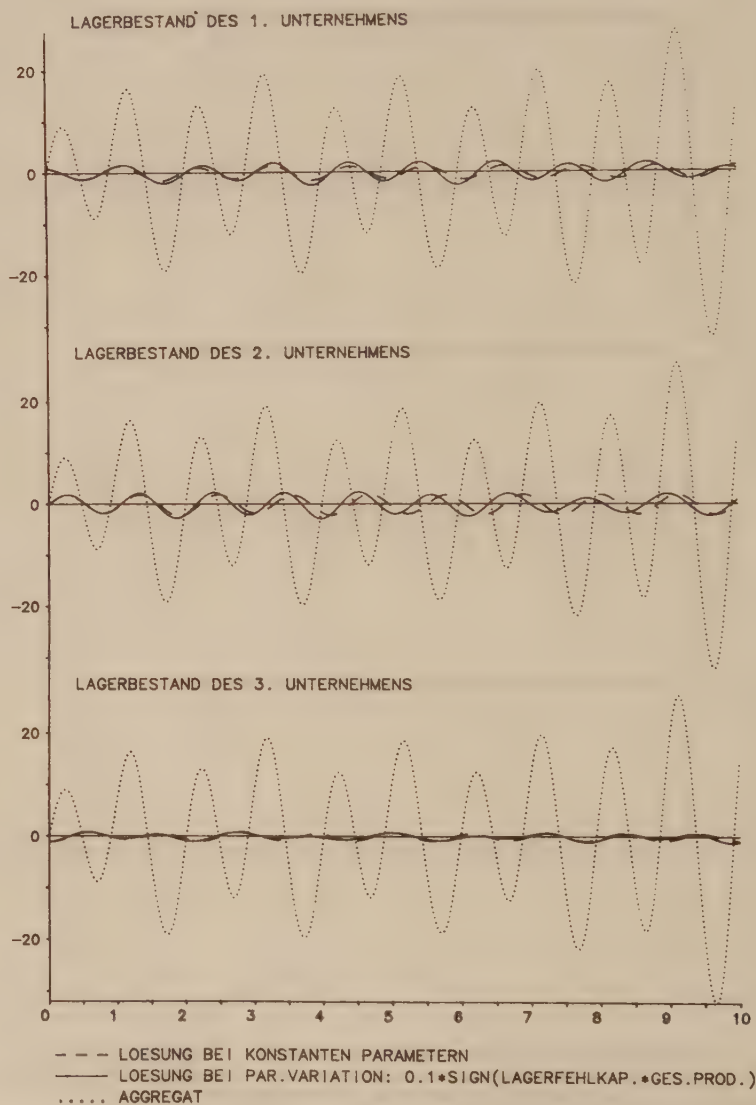


Abbildung 3.3.3.2.g

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 4 - 6 : AKZELERATORKOEFF. = 90%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

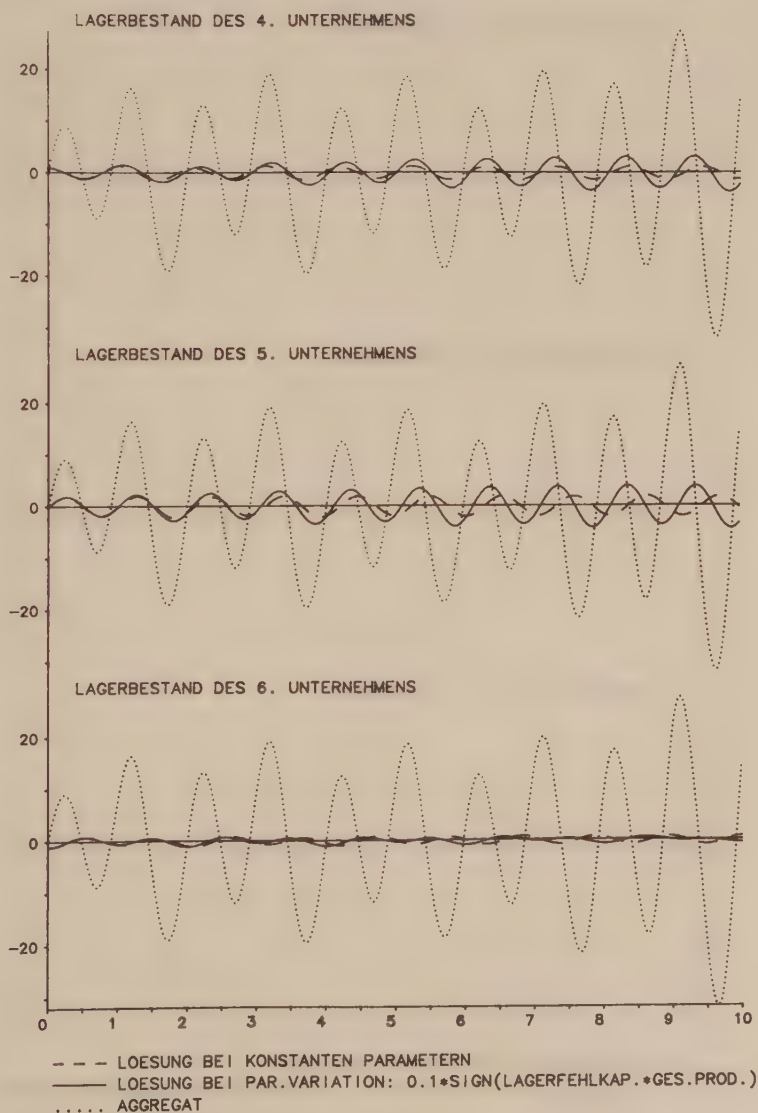


Abbildung 3.3.3.2.h

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 7 - 9 : AKZELERATORKOEFF. = MITTELV.
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

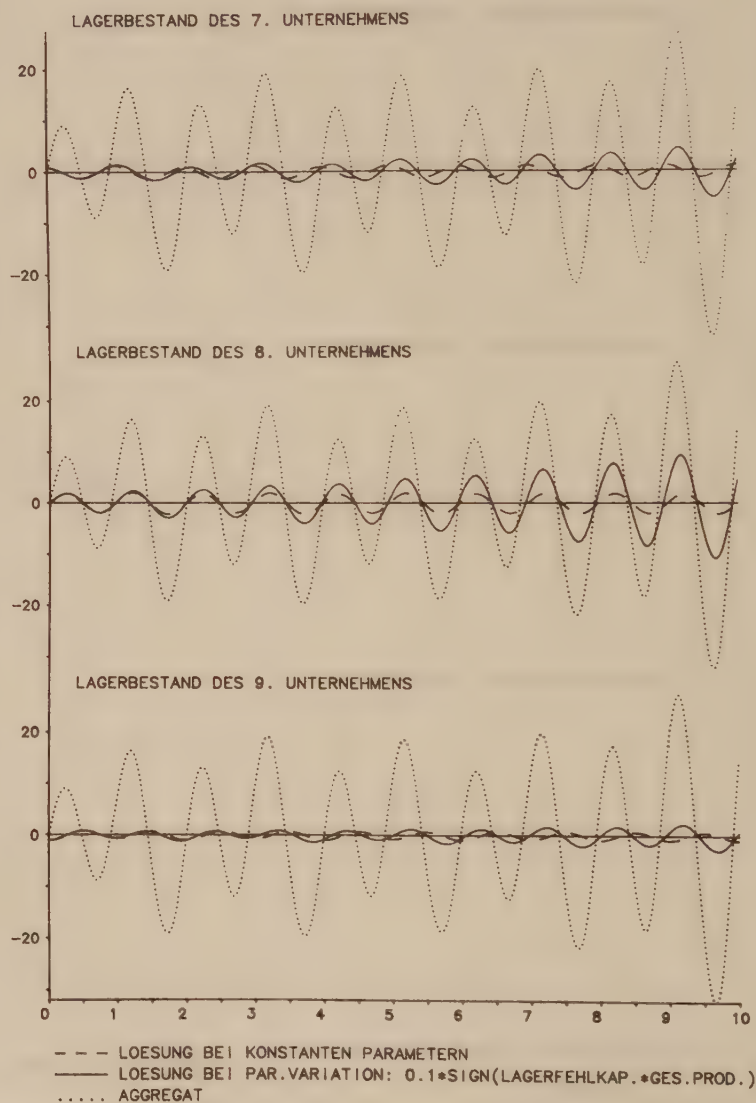


Abbildung 3.3.3.2.1

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 10 - 12 : AKZELERATORKOEFF. = 110%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

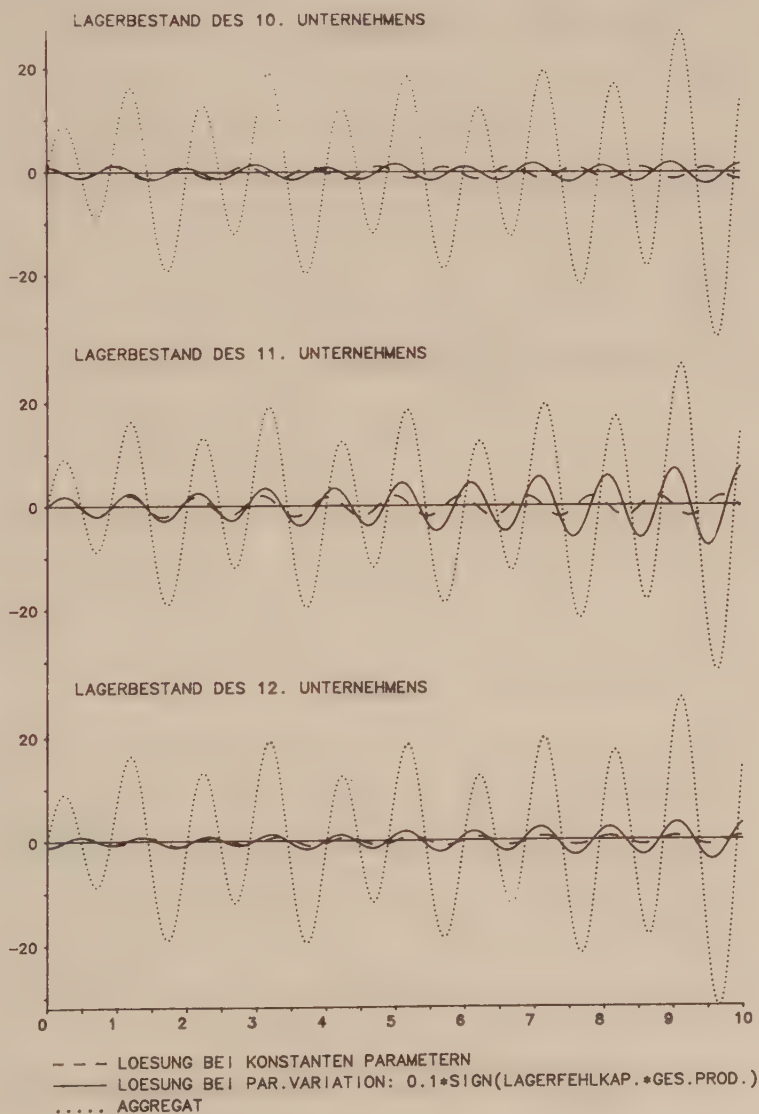


Abbildung 3.3.3.2.j

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN
MIT 15 UNTERSCHIEDLICHEN UNTERNEHMEN
UNTERNEHMEN 13 - 15 : AKZELERATORKOEFF. = 120%,
UNTERSCHIEDLICHE STARTPHASEN

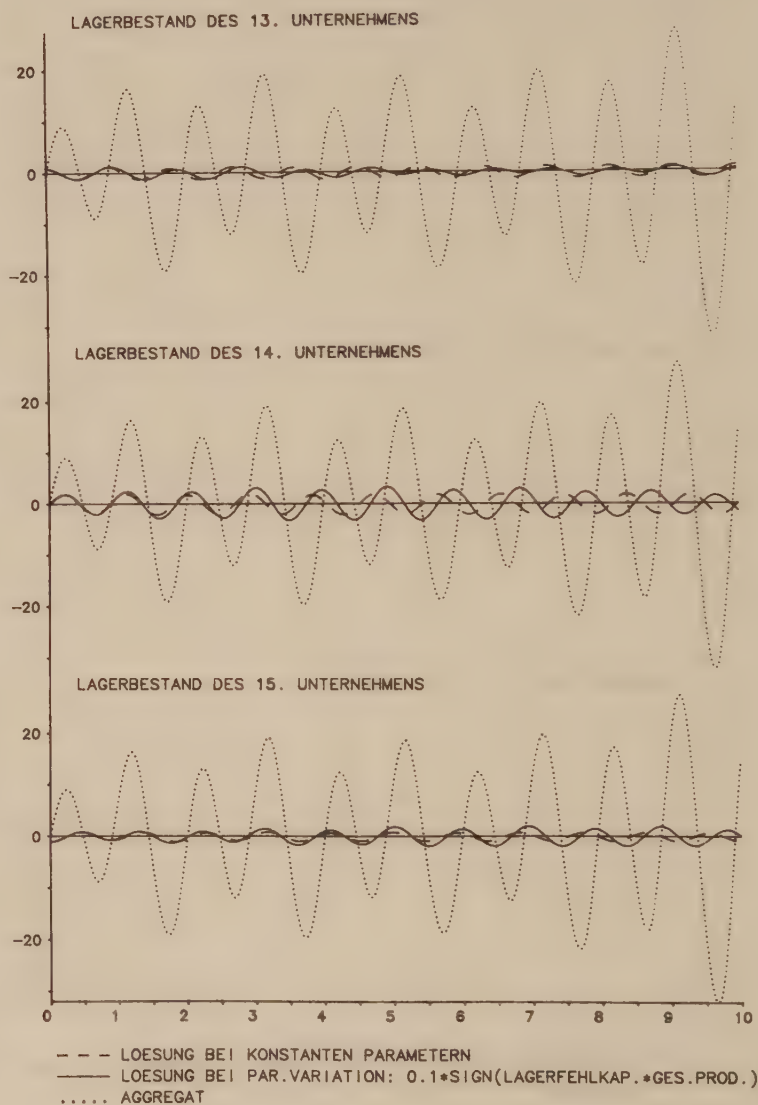


Abbildung 3.3.3.2.k

Endogene Parametervariation

Im nächsten Beispiel (Abbildung 3.3.3.3) wird die relative Phasenlage zwischen dem langen und dem kurzen Zyklus variiert. Während in den beiden vorigen Beispielen die Startphasen derart gewählt sind, daß Minima der Gesamtproduktion mit Extrema der aggregierten Ausrüstungsinvestitionen zusammenfallen, starten nun Gesamtproduktion und Ausrüstungsinvestitionen mit einer Nullstelle, d.h. der kurze Zyklus ist anfänglich um eine Viertelperiode verschoben. Diese Phasenverschiebung wird jedoch mit fortschreitender Zeit ausgeglichen, und gegen Ende der Beobachtungsperiode ist die relative Phasenlage der vorigen Beispiele erreicht.¹ Dieses Beispiel zeigt, daß die in Kapitel 3.2 vorhergesagte Phasenlage zwischen Lager- und Ausrüstungszyklus (entsprechend der "M"-Form) auch bei der Kombination von exogener und endogener Parametervariation ausgezeichnet ist.

Alle drei Beispiele zeigen, daß die Kombination der beiden Ansätze zur Variation der Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen ohne weiteres möglich ist. Somit können die erste und dritte der eingangs formulierten Fragen als positiv beantwortet gelten.

Nachfolgend wird die zweite Frage betrachtet: Inwieweit ist das Modell des Lagerzyklus stabil gegenüber der Überlagerung eines zusätzlichen langen Zyklus?

Um diese Frage zu untersuchen, wird im obigen System die relative Stärke des Ausrüstungszyklus vergrößert. In den zuvor betrachteten Versionen ist die Vorzeichenfolge der Gesamtproduktion und somit die Variation der Akzeleratorkoeffizienten der Produktion weitgehend durch

¹ Man beachte die markierte Referenzlinie bei etwa $t=8,7$.

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN;
 VARIATION DER AKZELERATORKOEFFIZIENTEN:
 PRODUKTION: $0.1 * \text{SIGN}(\text{LAGERFEHLKAP.} * \text{GES. PROD.})$
 AUSRUEST.: TEILS ENDOGEN, TEILS MIT LAGERZYKLUS

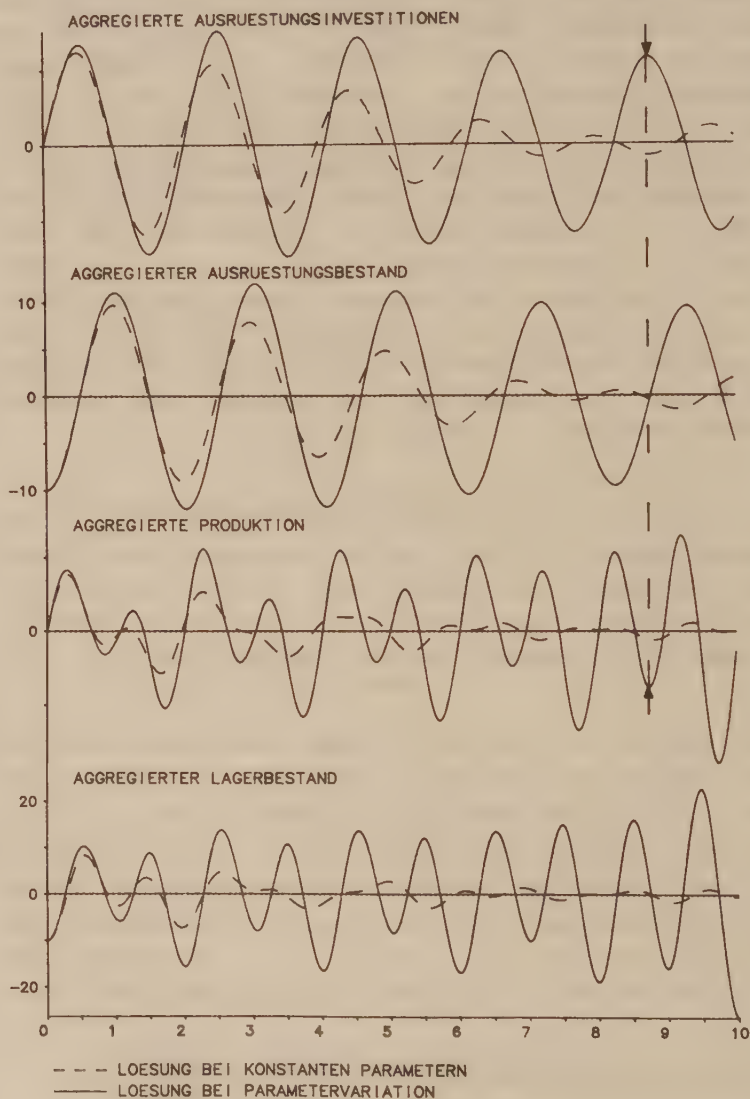


Abbildung 3.3.3.3

Endogene Parametervariation

den kurzen Zyklus bestimmt. Analoges gilt für die Vorzeichenfolge des aggregierten Lagerbestandes und die Variation eines Teils der Akzeleratorkoeffizienten der Ausrüstungsinvestitionen.

Mit zunehmender Stärke des langen Zyklus wird die durch den kurzen Zyklus gegebene Vorzeichenfolge der Gesamtproduktion und des aggregierten Lagerbestands verändert und hierdurch der Aggregationsmechanismus im Lagerzyklus beeinträchtigt.

In Abbildung 3.3.3.4 ist ein Beispiel für eine solche Situation dargestellt. Aufgrund des Beitrags des langen Zyklus erreicht das Minimum der Gesamtproduktion nach etwa 2.5 Perioden des kurzen Zyklus nicht die Nulllinie. In der Folge verschwindet der Beitrag des kurzen Zyklus im Aggregat durch Auslöschungseffekte, da offenbar die Wirkung der Parametervariation gestört ist. Der lange Zyklus hingegen bleibt bestehen, da in diesem Fall die Parametervariation zumindest für einen Teil der Unternehmen von den aggregierten Ausrüstungsinvestitionen bestimmt und von der relativen Stärke des langen im Vergleich zum kurzen Zyklus unabhängig ist. Nach etwa sechs Perioden des kurzen Zyklus sind auch die Gesamtproduktion und der aggregierte Lagerbestand allein vom langen Zyklus bestimmt.

Die Frage nach der Stabilität des Aggregationsmechanismus im kurzen Zyklus gegenüber der Überlagerung durch einen Beitrag des langen Zyklus kann nach diesen Untersuchungen wie folgt beantwortet werden:

- (a) Ist - wie in den ersten Beispielen dieses Kapitels - der Beitrag des längeren Zyklus hinlänglich gering, so daß die Vorzeichenfolge der Gesamtproduktion

DISAGGREGIERTES MODELL BEIDER ZYKLEN;
 VARIATION DER AKZELERATORKOEFFIZIENTEN:
 PRODUKTION: $0.1 * \text{SIGN}(\text{LAGERFEHLKAP.} * \text{GES. PROD.})$
 AUSRUEST.: TEILS ENDOGEN, TEILS MIT LAGERZYKLUS

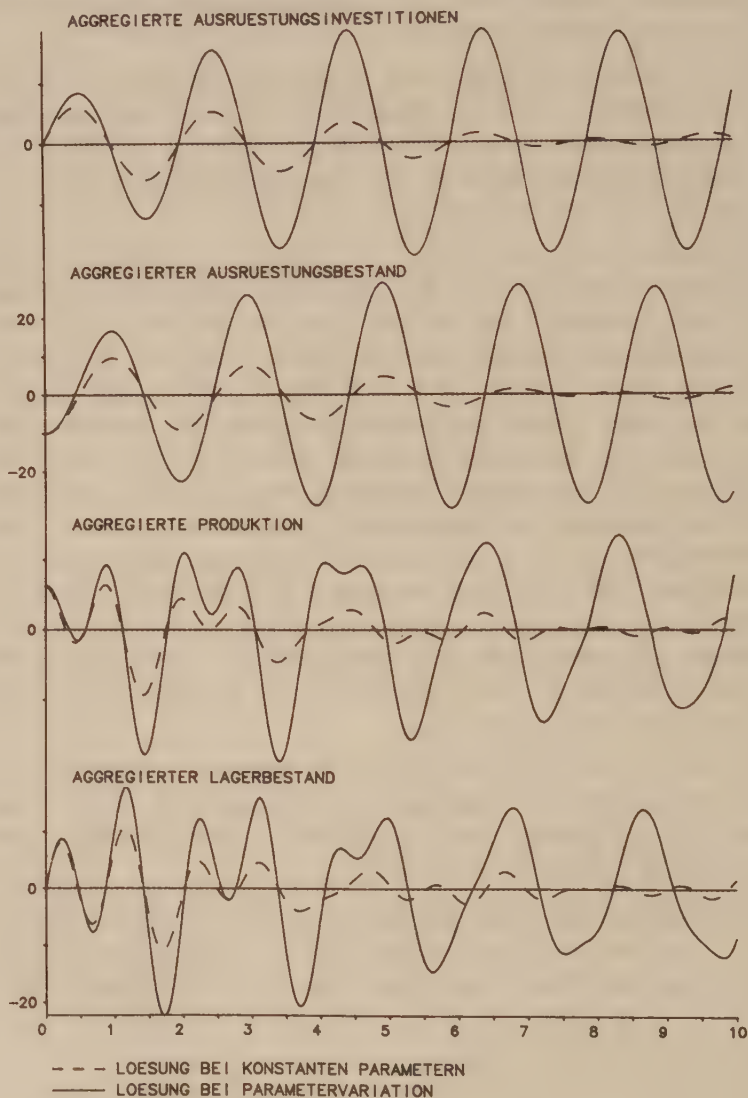


Abbildung 3.3.3.4

Endogene Parametervariation

durch den kurzen Zyklus bestimmt ist, so ist der in Kapitel 3.3.2 vorgeschlagene Aggregationsmechanismus für den kurzen Zyklus unbeeinträchtigt.

- (b) Ist - wie in dem zuletzt angeführten Beispiel - der Beitrag des langen Zyklus derart stark, daß die Vorzeichenfolge der Gesamtproduktion von derjenigen des kurzen Zyklus deutlich abweicht, so wird hierdurch der Aggregationsmechanismus im kurzen Zyklus unwirksam.¹

Mit der in (b) genannten Einschränkung kann daher auch die zweite der eingangs gestellten Fragen als positiv beantwortet betrachtet werden.

Insgesamt erweisen sich somit die in den vorigen Kapiteln auf der Basis von Einzelmodellen entwickelten Konzepte exogener und endogener Parametervariation als integrationsfähig bezüglich des betrachteten Gesamtmodells.

¹ Der Mechanismus der Aggregation im Ausrüstungszyklus durch exogene Parametervariation (Kapitel 3.2) ist in analoger Weise betroffen.

Literaturverzeichnis

- Abramovitz M. (1964): Evidence of Long Swings in Aggregate Construction Since the Civil War; NBER Occasional Paper 90, Columbia University Press, New York etc.
- Andronov A.A., Vitt A.A., Khakin S.E. (1966): Theory of Oscillators; Pergamon Press, Oxford
- Arnold V.I. (1980): Ordinary Differential Equations; MIT Press, Cambridge Mass.
- Bajt A. (1971): Investment Cycles in European Socialist Economies; Journal of Economic Literature 9, 53-63
- Björck A., Dahlquist G. (1979): Numerische Methoden; Oldenbourg-Verlag, München etc.
- Bober S. (1968): The Economics of Cycles and Growth; Wiley & Sons, New York etc.
- Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. (1961): Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations; Gordon & Breach Sci. Publ., New York

Literaturverzeichnis

- Britton A. (1986): The Trade Cycle in Britain 1958-1982;
Cambridge University Press, Cambridge etc.
- Bronstein I.N., Semendjajew K.A. (1985²²): Taschenbuch
der Mathematik; Deutsch-Verlag, Frankfurt/M.
etc.
- van Daal J., Merkies A.H.Q.M (1984): Aggregation in
Economic Research; Reidel Publ. Co.; Dordrecht
etc.
- Goodwin R.M. (1983a): Essays in Linear Economic
Structures; MacMillan Press, London etc.
- Goodwin R.M. (1983b): Disaggregating Models of
Fluctuating Growth; in Goodwin R.M., Krüger M.,
Vercelli A. (eds.): Nonlinear Models of
Fluctuating Growth (International Symposium,
Siena, März 1983); Lecture Notes in Economics
and Mathematical Systems 228, Springer-Verlag,
Berlin etc. (1984), 67-72
- Gould J.P. (1968): Adjustment Costs in the Theory of
Investment of the Firm; Review of Economic
Studies 35, 47-55
- Granger C.W.J. (1966): The Typical Spectral Shape of an
Economic Variable: Econometrica 34, 150-161

Literaturverzeichnis

Green H.A.J. (1964): Aggregation in Economic Analysis;
Princeton University Press, Princeton, New
Jersey

Grigorieff R.D. (1977): Numerik gewöhnlicher
Differentialgleichungen I,II; Teubner-Verlag,
Stuttgart

Haberler G. (1963): Prosperity and Depression; Atheneum,
New York

Hadley G., Kemp M.C. (1971): Variational Methods in
Economics; North Holland Publ. Comp., Amsterdam
etc.

Hansen A.H. (1941): Fiscal Policy and Business Cycles;
Norton & Co., New York

Hicks J.R. (1950): A Contribution to the Theory of the
Trade Cycle; Oxford University Press

Hillinger C. (1963): A Theory of the Inventory Cycle; PhD
Thesis, University of Chicago

Hillinger C. (1966): An Econometric Model of Mild
Business Cycles; Manchester School of Economics
and Social Studies, 269-284

Literaturverzeichnis

- Hillinger C. (1986a): Inventory Cycle and Equipmrent Cycle Interaction; in Chikan A. (Hrsg.): Inventories in Theory and Practice (Proc. Third International Symposium on Inventories, Budapest, 1984); Elsevier, Amsterdam etc.
- Hillinger C. (1986b): Theorie und Empirie der Konjunkturzyklen; Konjunkturpolitik 32, 101-129
- Hillinger C. (1987a): Business Cycle Stylized Facts and Explanatory Models; Journal of Economic Dynamics and Control 11, 257-263
- Hillinger C. (1987b): Keynes and Business Cycles; in Gandolfo C., Marzano, F. (Hrsg.): Essays in Memory of Vittorio Marrama; Giuffre editore, Mailand
- Hirsch M.W., Smale S. (1974): Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra; Academic Press, New York
- Kaplan W. (1962): Ordinary Differential Equations; Addison-Wesley Publ. Comp., Reading etc.
- Kraft M., Weise P. (1987): Eine Formalisierung von Spiethoffs Theorie der wirtschaftlichen

Literaturverzeichnis

- Wechsellagen; in Flaschel P., Krüger M. (eds.):
Dynamische Wirtschaftstheorie (Tagung,
Bielefeld, Oktober 1987), im Druck
- Landau L.D., Lifschitz E.M. (1979): Lehrbuch der
Theoretischen Physik I: Mechanik;
Akademie-Verlag, Berlin
- Lange O. (1971): Political Economy II; Oxford, New York
etc.
- Lapidus L., Seinfeld J. (1971): The Numerical Solution of
Ordinary Differential Equations; Academic Press,
New York
- Lucas R.E. (1967): Optimal Investment Policy and the
Flexible Accelerator; International Economic
Review 8, 78-85
- Kevorkian J., Cole J.D. (1968): Perturbation Methods in
Applied Mathematics; Springer-Verlag, New York
etc.
- Matthews R.C.O. (1959): The Business Cycle; University
Press, Chicago
- Metzler L.A. (1941): The Nature and Stability of
Inventory Cycles; Review of Economic Statistics,
August 1941

Literaturverzeichnis

- Minorsky N. (1962): Non-Linear Oscillations; Van Nostrand
Publ. Co., New York
- Mortensen D.T. (1973): Generalized Costs of Adjustment
and Dynamic Factor Demand Theory; Econometrica
41, 657-67
- Sabov Z. (1983): Zyklische wirtschaftliche
Aktivitätsschwankungen in sozialistischen
Planwirtschaften; Dunker & Humblot Verl., Berlin
- Samuelson P.A. (1939): Interaction between the Multiplier
Analysis and the Principle of Acceleration;
Review of Economic Statistics
- Samuelson P.A. (1975): Volkswirtschaftslehre I, 6.
Auflage; Bund-Verlag, Köln
- Schlicht E. (1985): Isolation and Aggregation in
Economics; Springer-Verlag, Berlin etc.
- Schumpeter J. (1939): Business Cycles; McGraw-Hill Publ.,
New York
- Spiethoff A. (1955): Die wirtschaftlichen Wechsellagen;
Mohr-Verlag Tübingen etc.
- Stoer J., Bulirsch R. (1978): Einführung in die
Numerische Mathematik II; Springer-Verlag,
Berlin etc.

Literaturverzeichnis

- Tichy G.J. (1976): Konjunkturschwankungen;
Springer-Verlag, Berlin etc.
- Tinbergen J. (1939): Statistical Testing of Business
Cycle Theories, vol. I: A Method and its
Application to Investment Activity; Genf
- Theil H. (1965): Linear Aggregation of Economic
Relations; North Holland Publ. Co., Amsterdam
- Treadway A.B. (1971): On the Multivariate Flexible
Accelerator, *Econometrica* 39, 845-56
- Wehner G. (1985): Der Konjunkturverlauf in der
Bundesrepublik Deutschland und in den
Vereinigten Staaten von Amerika in den Jahren
1960-1983; Dissertation, Universität München
- Wilson L.L. (1964): Catalogue of Cycles I; Foundation For
the Study of Cycles, Pittsburgh, Pennsylvania

Ich versichere ehrenwörtlich, die Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt zu haben; sämtliche Quellen sowie mir zuteilgewordene Anregungen wurden in der Arbeit in geeigneter Weise gekennzeichnet.

Bei der Erstellung dieser Arbeit wurden mir von verschiedener Seite Anregungen und Hilfe zuteil, für mich an dieser Stelle zu bedanken ich die angenehme Pflicht habe:

Großen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. Claude Hillinger, dessen theoretische Arbeiten nicht nur die Basis der vorliegenden bilden, sondern der durch zahlreiche Ideen, Anregungen und konstruktive Kritik beständig wertvolle Unterstützung bot. Ich danke ihm für sein wohlwollendes Interesse und sein Vertrauen angesichts meiner für die Zwecke der Konjunkturtheorie ungewöhnlichen akademischen Vorbildung.

Wichtige Hinweise und Anregungen erhielt ich bei Konferenzen und Vorträgen und habe vielen Gesprächspartnern zu danken. Besonders herzlich danke ich Herrn Professor Michael C. Lovell für sein Interesse an dieser Arbeit und seine freundliche Einladung zur ISIR-Konferenz 1987. Herrn Professor Charles C. Holt verdanke ich den Hinweis auf Theil (1965), einem mir unbekannten Referenten der *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* den Hinweis auf Schlicht (1985). Herrn Professor Walther Richert danke ich für seine Hinweise zur numerischen Behandlung der Modellgleichungen. Die Anregung zur Betrachtung der mikroökonomischen Grundlagen (Kapitel 2.2) verdanke ich den Herren Professoren Edwin von Böventer und Hans-Werner Sinn, Herrn Professor von Böventer danke ich überdies für die Übernahme des Korreferats der Arbeit.

Zahllose fruchtbare Diskussionen wurden im Mitarbeiterkreis des Seminars für mathematische Wirtschaftstheorie in kollegialer und freundschaftlicher Atmosphäre geführt. Hierfür zu besonderem Dank verpflichtet bin ich den Damen und Herren Dr. Gerhard

Wehner, Jochen Meiners, Monika Sebold und Michael Reiter.
Frau Christine Köbele erstellte die Studie von
Unternehmenszyklen (vgl. Kapitel 2.3); Frau Monika Mende
und Herr Joseph Plenk fertigten Programnteile zur
numerischen Integration der Modellsysteme an. Herrn
Berhard Röck danke ich für seine EDV-bezogene Hilfe bei
Niederschrift und Ausdruck der Arbeit.

Lebenslauf: Thilo Martin Weser

3.9.1959 Geboren in Stuttgart als Sohn des
Patentanwaltes Dr. Wolfgang Weser und seiner
Ehefrau Annemarie Weser geb. Perkams

1963 - 1974 Wohnhaft in Wiesbaden

1966 - 1969 Besuch der Fritz-Gansberg-Schule
(Grundschule)

1969 - 1974 Besuch der Oranienschule (math.-nat.
Gymnasium)

Seit 1974 Wohnhaft in München

1974 - 1979 Besuch des Max-Planck-Gymnasiums (math.-nat.)

1979 Abitur, Beginn des Studiums an der
Universität München

1983 Mathematik-Diplom

1984 Physik-Diplom

Winter Studienaufenthalt am Puschkin-Institut in
1984/85 Moskau

1987 Promotion in Experimentalphysik

Seit Assistent am Seminar für mathematische

1.4.1987 Wirtschaftstheorie

